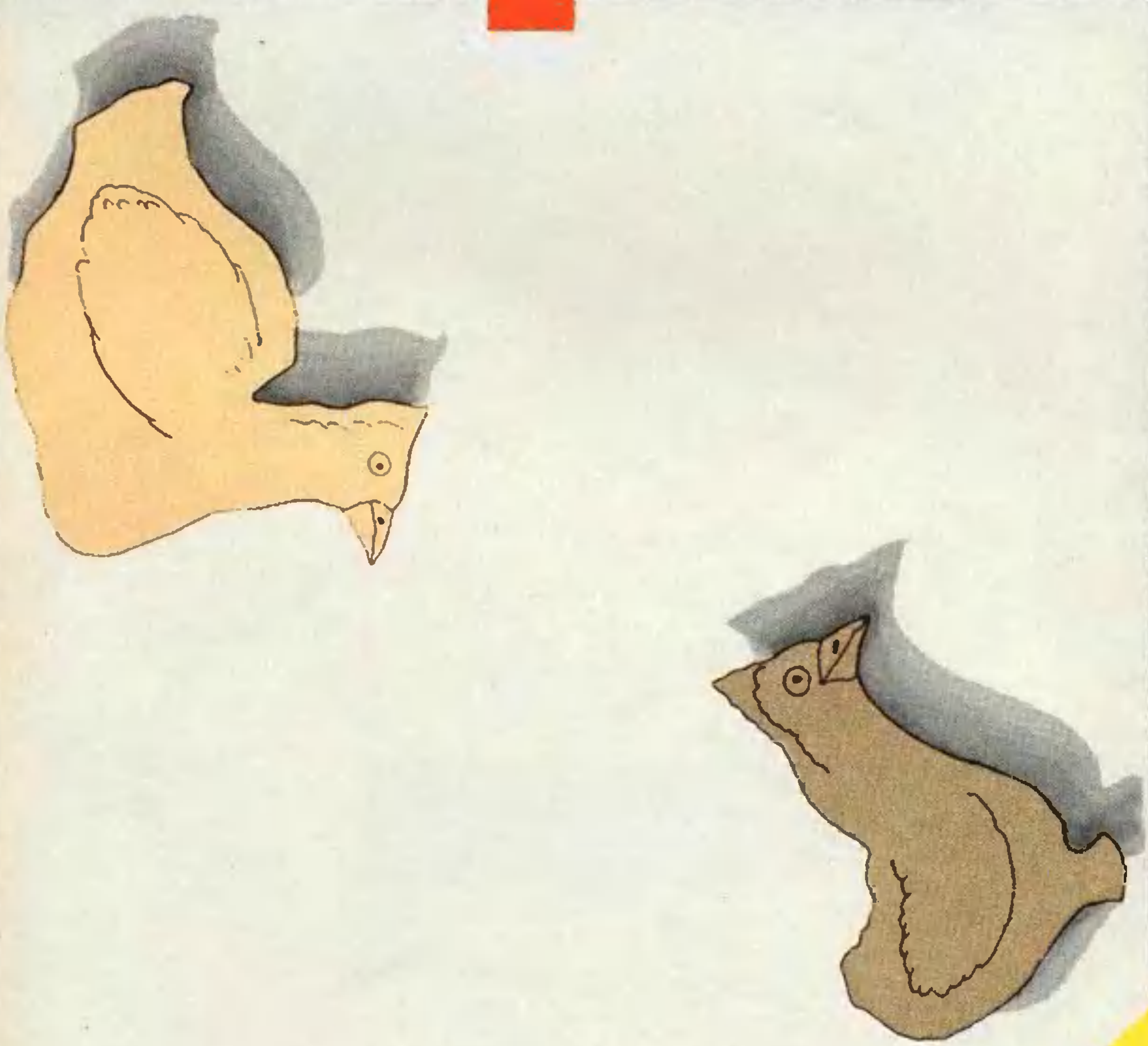
ISSN 0130-2221

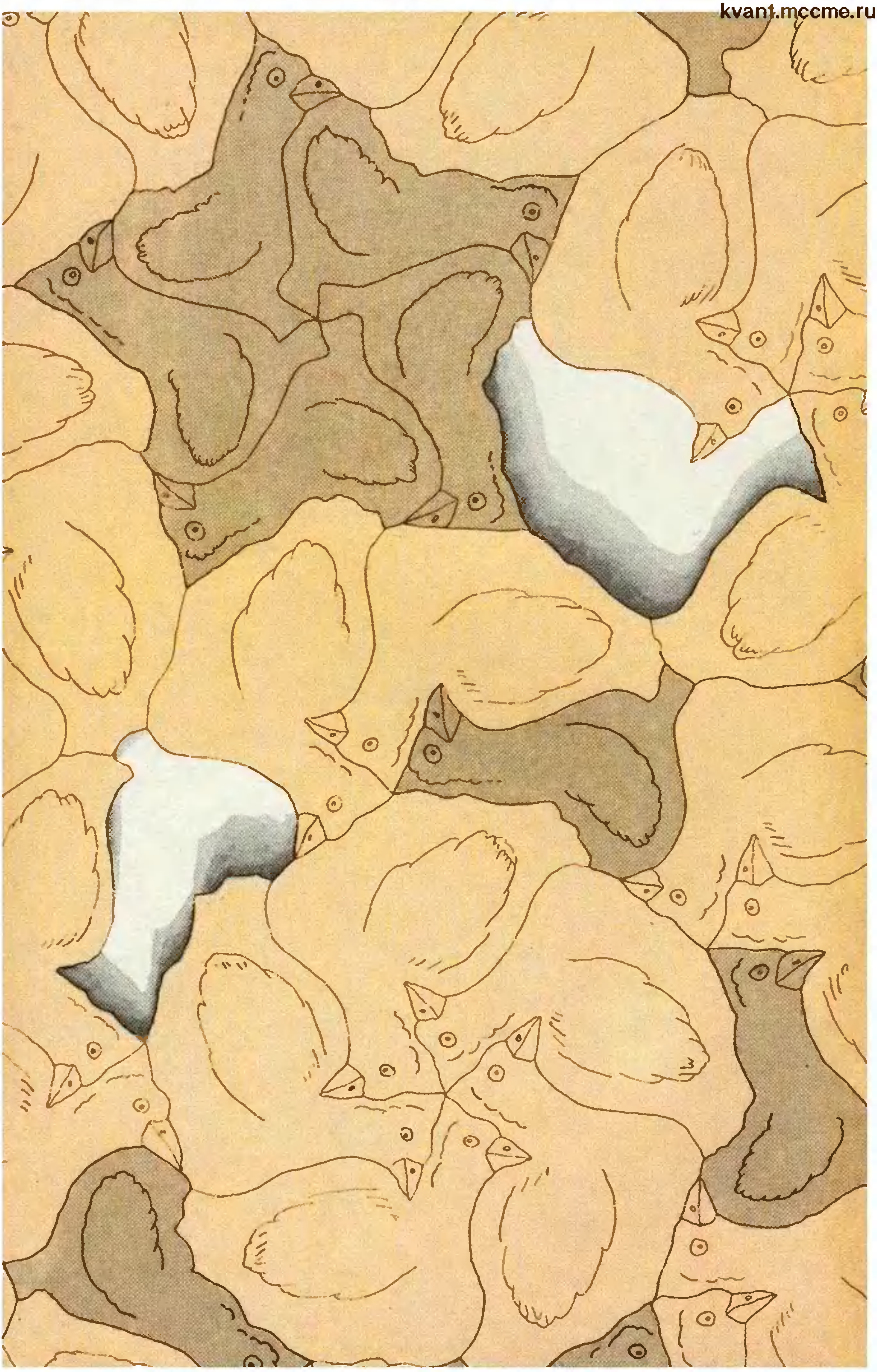
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1987



Квант

Основан в 1970 году

1987

6

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

На первой и второй страницах обложки показаны квазикристаллические замощения плоскости двумя цыплятами, придуманные Роджером Пенроузом.

УЗОРЫ ПЕНРОУЗА И КВАЗИКРИСТАЛЛЫ

Доктор физико-математических наук
В. Е. КОРЕПИН

В этой статье рассказано о математике квазикристаллов — материалах нового типа, открытых в 1984 г. Их физическому открытию предшествовало создание занятных (и совершенно элементарных!) математических моделей — узоров Пенроуза — двумерных аналогов квазикристаллических структур. Поначалу эти конструкции воспринимались как изящные безделушки, но в настоящее время уже опубликовано несколько сот серьезных научных статей по физике и математике квазикристаллов. Так что читателям «Кванта» здесь представляется редкая в наши дни возможность: изучив вполне элементарный, почти развлекательный материал, приобщиться к стремительно развивающейся новой области науки.

Речь пойдет о замощении плоскости. *Замощение* — это покрытие всей плоскости неперекрывающимися фигурами. Вероятно, впервые интерес к замощению возник в связи с построением мозаик, орнаментов и других узоров. Известно много орнаментов, составленных из повторяющихся мотивов.

Одно из простейших замощений приведено на рисунке 1. Плоскость покрыта параллелограммами, причем все параллелограммы одинаковы. Любой параллелограмм этого замощения можно получить из розового параллелограмма, сдвигая последний на вектор $n\vec{u}+m\vec{v}$ (векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ определяются ребрами выделенного параллелограмма, n и m — целые числа). Следует отметить, что все замощение как целое переходит в себя при сдвиге на вектор $\vec{u}$ (или $\vec{v}$). Это свойство можно взять в качестве определения: именно, *периодическим замощением с периодами* $\vec{u}$ *и* $\vec{v}$ назовем такое замощение, которое переходит в себя при сдвиге на вектор $\vec{u}$ и на вектор $\vec{v}$. Периодические замощения могут быть и весьма замысловатыми, некоторые из них очень красивы. Примером может служить периодическое замощение, придуманное голландским художником М. Эшером (см. рис. 5 на с. 4)

Квазипериодические замощения плоскости

Существуют и интересные непериодические замощения плоскости. В 1974 г. английский математик Роджер Пенроуз открыл *квазипериодические* замощения плоскости. Свойства этих замощений естественным образом обобщают свойства периодических.

Пример такого замощения приведен на рисунке 2. Вся плоскость покрыта ромбами. Между ромбами нет промежутков. Любой ромб замощения с помощью сдвигов и поворотов можно получить всего из двух. Это *узкий ромб* (36°, 144°) и *широкий ромб* (72°, 108°), показанные отдельно на рисунке 3. Длина сторон каждого из ромбов рав-

Рис. 1.

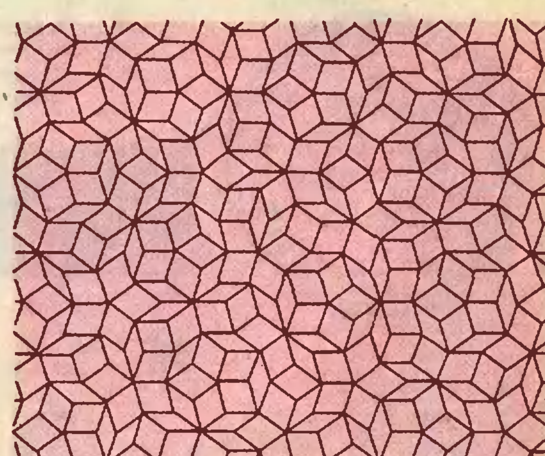


Рис. 2. Пример Р. Пенроуза квазипериодического замощения плоскости ромбами двух типов.

на 1. Это замощение не является периодическим — оно очевидно не переходит в себя ни при каких сдвигах. Однако оно обладает неким важным свойством, которое приближает его к периодическим замощениям и заставляет называть его *квазипериодическим*. Дело в том, что *любая конечная часть квазипериодического замощения встречается во всем замощении бесчисленное множество раз.*

Любопытно отметить, что это замощение обладает осью пятого порядка (переходит в себя при повороте на угол 72° вокруг некоторой точки), в то время как таких осей у периодических замощений не существует (не очень простое доказательство последнего факта мы опускаем).

Другое квазипериодическое замощение плоскости, построенное Пенроузом, приведено на рисунке 4. Вся плоскость покрыта четырьмя многоугольниками специального вида. Это звезда, ромб, правильный пятиугольник и «бумажный кораблик». Самый известный пример квазипериодического замощения приведен на первой и на второй страницах обложки. Пенроузу удалось покрыть всю плоскость цыплятами двух типов.

Преобразование инфляции и дефляции

Каждый из показанных выше трех примеров квазипериодического замощения — это покрытие плоскости с помощью сдвигов и поворотов конечного количества фигур. Это покрытие не переходит в себя ни при каких сдвигах, любая конечная часть покрытия встречается во всем покрытии бесчисленное множество раз, притом, «одинаково часто» по всей плоскости.

Замощения, описанные выше, обладают некоторым специальным свойством, которое Пенроуз назвал *инфляцией*. Изучение этого свойства позволяет разобраться в структуре этих покрытий. Более того, инфляцию можно использовать для построения узоров Пенроуза.

Наиболее наглядным образом можно проиллюстрировать инфляцию на примере *треугольников Робинсона*. Треугольники Робинсона — это два равнобедренных треугольника P, Q с углами (36°, 72°, 72°) и (108°, 36°, 36°) соответственно и длинами сторон, как на рисунке 6 (с. 4). Здесь τ — золотое сечение: $\tau=(1+\sqrt{5})/2$.

Эти треугольники можно разрезать на меньшие, так, чтобы каждый из новых (меньших) треугольников был подобен одному из исходных. Разрезание показано на рисунке 7: прямая ac является биссектрисой угла dab, а отрезки ae, ab и ac равны. Легко видеть, что треугольники acb и ace равны между собой и подобны треугольнику P, а треугольник cde подобен треугольнику Q. Треугольник Q разрезан так. Длина отрезка gh равна длине отрезка ih (и равна 1). Треугольник igh подобен треугольнику P, а треугольник igf подобен треугольнику Q. Линейные размеры новых треугольников в τ раз меньше чем у исходных. Такое разрезание называется *дефляцией*.

Обратное преобразование — склеивание — называется *инфляцией*. Рисунок 7 показывает, что из двух P-треугольников и одного Q-треугольника можно склеить P-треугольник, а из P- и Q-треугольника можно склеить Q-треугольник. У новых (склеенных) треугольников линейные размеры в τ раз больше, чем у исходных треугольников.

Итак, мы ввели понятия преобразований инфляции и дефляции. Ясно, что преобразование инфляции можно

Рис. 3.

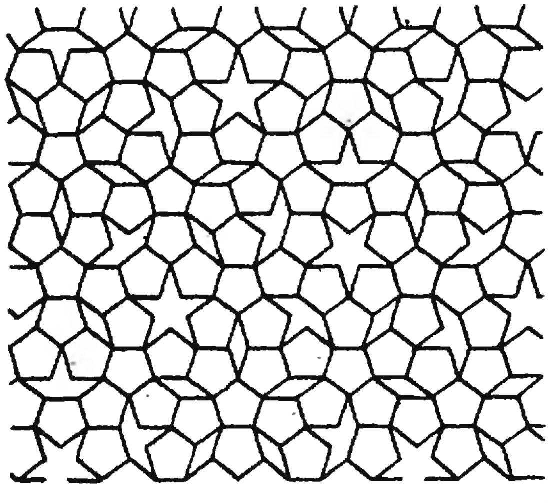


Рис. 4. Квазипериодическое замощение плоскости многоугольниками четырех типов.

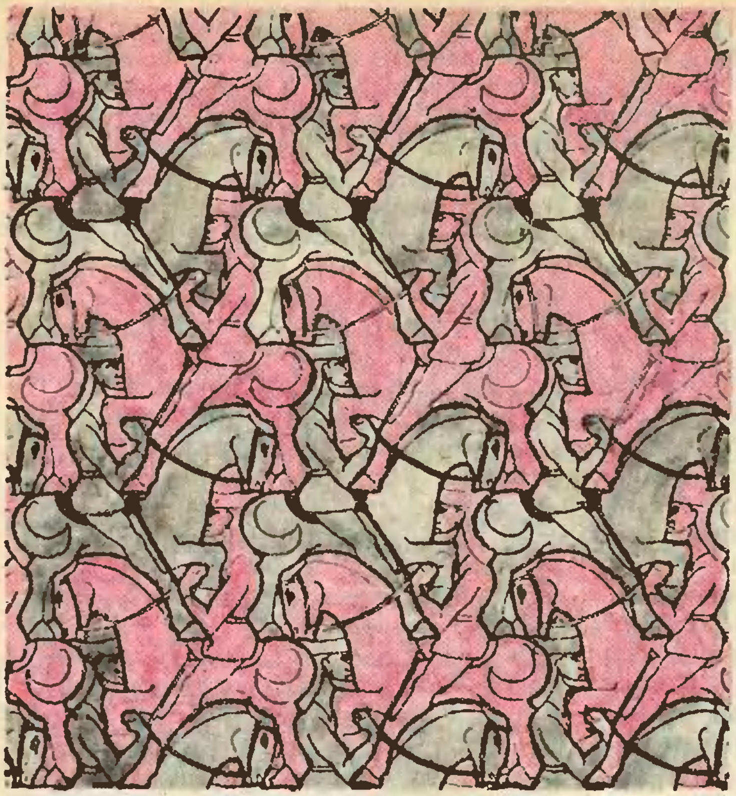


Рис. 5. «Всадники» М. Эшера — пример периодического замощения плоскости.

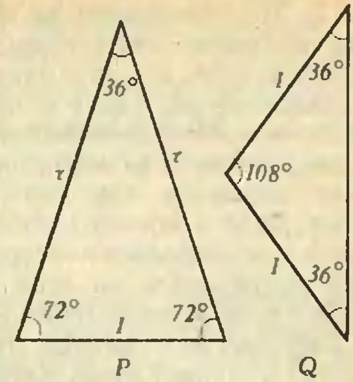


Рис. 6.

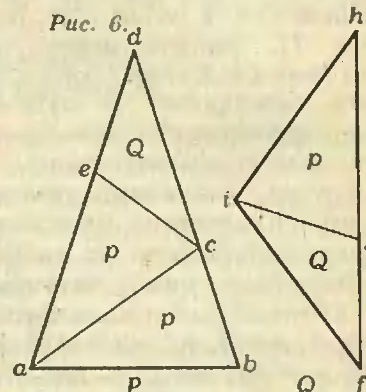


Рис. 7.

повторить; при этом получится пара треугольников, размеры которых в τ^2 раз больше исходных. Последовательно применяя преобразование инфляции, можно получить пару треугольников сколь угодно большого размера. Таким образом можно замостить всю плоскость.

Можно показать, что описанное *замощение треугольниками Робинсона не является периодическим.*

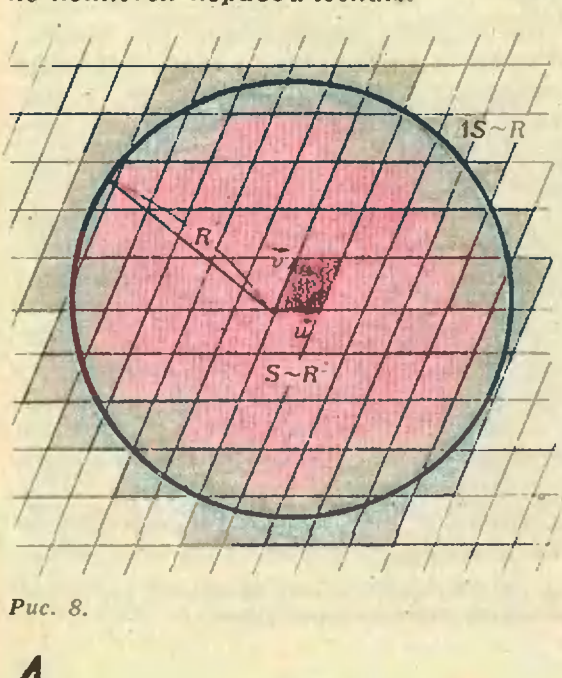


Рис. 8.

Наметим доказательство этого утверждения. Будем рассуждать от противного. Предположим, что замощение плоскости треугольниками Робинсона периодическое с периодами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Покроем плоскость сетью параллелограммов со сторонами $\vec{u}$, $\vec{v}$ (см. рис. 1). Обозначим через p число P-треугольников, у которых левая нижняя вершина (относительно нашей сети) расположена в заштрихованном параллелограмме; аналогично определим число q. (Отобранные $p+q$ треугольники образуют так называемую *фундаментальную область* данного периодического замощения.) Рассмотрим круг радиусом R с центром O. Обозначим через p_R (соответственно q_R) число P-треугольников (соответственно — Q-треугольников), лежащих внутри этого круга.

Можно доказать, что

$$\lim_{R\to\infty}(p_R/q_R)=p/q. \qquad (1)$$

Действительно, число треугольников, пересекающих о к р у ж н о с т ь радиуса R, пропорционально R, в то время как число треугольников внутри к р у г а радиуса R пропорционально R^2. Поэтому в пределе отношение числа P-треугольников к числу Q-треугольников в круге равно этому отношению в фундаментальной области (рис. 8).

Возьмем теперь наше замощение и выполним преобразование дефляции. Тогда в исходной фундаментальной области окажется $p'=2p+q$ меньших P-треугольников и $q'=p+q$ меньших Q-треугольников (см. рис. 7). Обозначим через p'_R и q'_R число меньших треугольников в круге радиуса R. Теперь легко получить противоречие. В самом деле,

$$\frac{p}{q}=\lim_{R\to\infty}\frac{p_R}{q_R}=\lim_{R\to\infty}\frac{p'_R}{q'_R}=\frac{p'}{q'}=\frac{2p+q}{p+q},$$

откуда, решая уравнение $p/q=(2p+q)/(p+q)$, находим

$$p/q=(1+\sqrt{5})/2,$$

в то время как p и q — целые! Противоречие показывает, что замощение треугольниками Робинсона — не периодическое.

Оказывается, что это покрытие треугольниками Робинсона не единственное. Существует бесконечно много различных квазипериодических покрытий плоскости треугольниками Робинсона. Грубо говоря, причина этого явления лежит в том, что при дефляции биссектрису на рисунке 7 можно провести из вершины b, а не из вершины a. Используя этот произвол, можно добиться, например, чтобы покрытие треугольниками превратилось в покрытие ромбами, показанное на рисунке 2. Покрытия цыплятами также порождается треугольниками Робинсона.

Преобразование дуальности

Способ построения квазипериодических замощений, приведенный выше, выглядит как догадка. Однако существует регулярный способ построения квазипериодических покрытий. Это метод *преобразования дуальности*, идея которого принадлежит голландскому математику де Брауну.

Поясним этот метод на примере построения замощения плоскости ромбами (см. рис. 3). Сначала построим *сетку* G. Для этого возьмем правильный пятиугольник и пронумеруем его стороны ($j=1, 2, 3, 4, 5$; рис. 10). Рассмотрим сторону с номером j. Построим бесконечный набор прямых, параллельных этой стороне, так, чтобы расстояние между двумя ближайшими прямыми равнялось 1. Проведем аналогичное построение для каждой из сторон пятиугольника; прямые мы проведем так, чтобы они пересекались лишь попарно. Получится набор прямых, который не является периодическим (рис. 9). Прямые в этом наборе будем обозначать буквами l. Перенумеруем прямые двумя индексами: $l_j(n)$. Здесь j указывает на направление прямой (какой стороне пятиугольника она параллельна). Целое число n нумерует различные параллельные прямые, пробегает все целые значения (как положительные, так и отрицательные). Этот набор прямых делит плоскость на бесконечный набор многоугольников. Эти многоугольники называются *гранями* сетки. Стороны многоугольников будем называть *ребрами* сетки, а вершины многоугольников — *вершинами* сетки. (Аналогично для квазипериодического покрытия Q: ромбы — это грани Q, стороны ромбов — ребра Q, вершины ромбов — вершины Q.)

Таким образом, сетка G построена.

Совершим теперь преобразование *дуальности*. Каждой грани сетки G сопоставим вершину квазипериодического покрытия Q (вершину ромба). Вершины обозначим буквами $\vec{v}$ (это векторы). Сначала сопоставим каждой грани M сетки пять целых чисел $n_j(M)$, $j=1, 2, \ldots, 5$ по следующему правилу. Внутренние точки грани M лежат между какой-то прямой $l_j(n)$

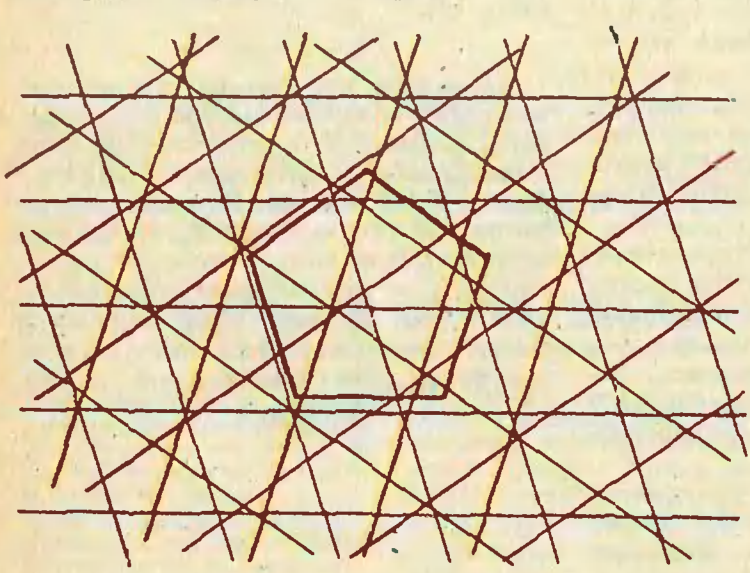


Рис. 9.

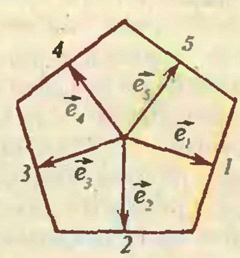


Рис. 10.

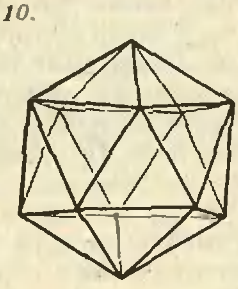


Рис. 11.

и параллельной ей прямой $l_j(n+1)$. Это целое число n мы сопоставим грани M. Поскольку в сетке есть прямые пяти направлений, то таким образом мы сопоставим пять целых чисел $n_j(M)$ каждой грани M сетки G. Вершина $\vec{v}$ квазипериодического покрытия Q, соответствующая данной грани M сетки G, строится так:

$$\vec{v}(M)=n_1(M)\vec{e}_1+n_2(M)\vec{e}_2+\ldots+n_5(M)\vec{e}_5.$$

Здесь $\vec{e}_j$ — вектор единичной длины, направленный из центра правильного пятиугольника к середине стороны с номером j. Таким образом, каждой грани сетки мы сопоставили вершину покрытия. Так можно построить все вершины Q.

Теперь некоторые вершины соединим между собой отрезками прямых линий. Это будут ребра покрытия Q (стороны ромбов). Для этого рассмотрим пару граней M_1 и M_2, имеющих общее ребро. Вершины покрытия, соответствующие этим граням ($\vec{v}\,(M_1)$ и $\vec{v}(M_2)$), мы и соединим между собой отрезками.

Тогда оказывается, что разность

$$\vec{v}(M_1)-\vec{v}(M_2) \qquad (2)$$

может быть равна лишь одному из десяти векторов $\pm\vec{e}_j$. (Мы этот факт доказывать не будем.)

Таким образом, каждому ребру сетки сопоставляется ребро покрытия Q. Каждой вершине сетки сопоставляется грань покрытия Q (ромб). Действительно, к каждой вершине сетки примыкают четыре грани M_k ($k=1, 2, 3, 4$). Рассмотрим соответствующие им четыре вершины покрытия $\vec{v}\,(M_k)$. Из свойства разности (2) следует, что ребра покрытия, проходящие через эти вершины, образуют границу ромба. Квазипериодическое покрытие плоскости ромбами построено.

Мы проиллюстрировали метод преобразования дуальности. Это общий способ построения квазипериодических покрытий. В этой конструкции правильный пятиугольник можно заменить на любой правильный многоугольник. Получится новое квазипериодическое покрытие.

Метод преобразования дуальности применим и для построения квазипериодических структур в пространстве.

Квазипериодическое заполнение трехмерного пространства

Существует трехмерное обобщение узоров Пенроуза. Трехмерное пространство может быть заполнено параллелепипедами специального вида. Параллелепипеды не имеют общих внутренних точек и между ними нет промежутков. Каждый параллелепипед этого заполнения с помощью сдвигов и поворотов может быть получен всего из двух параллелепипедов. Это так называемые параллелепипеды Аммана-Маккэя. Для того, чтобы задать параллелепипед, достаточно задать три ребра, выходящих из одной вершины. Для первого параллелепипеда Аммана-Маккэя эти векторы имеют вид:

$$\vec{e}_1=(0;\ 1;\ \tau),\ \vec{e}_2=(-\tau;\ 0;\ -1),$$
$$\vec{e}_3=(\tau;\ 0;\ -1),$$

а для второго параллелепипеда:

$$\vec{e}_4=(0;\ -1;\ \tau),\ \vec{e}_5=(\tau;\ 0;\ 1),$$
$$\vec{e}_6=(0;\ 1;\ \tau).$$

Заполнение этими параллелепипедами не переходит в себя ни при каких сдвигах, однако любая конечная его часть встречается во всем заполнении бесчисленное множество раз. Заполнение пространства этими параллелепипедами связано с симметриями *икосаэдра* (эти симметрии невозможны у периодического замощения пространства). Икосаэдр — это платоновское тело (правильный многогранник). Каждая из его граней является правильным треугольником. Икосаэдр имеет 12 вершин, 20 граней и 30 ребер (рис. 11).

* * *

Оказалось, что именно такими симметриями обладает быстро охлажденный алюминиево-марганцевый расплав $Al_{0.86}Mn_{0.14}$ (открытый в 1984 г.). Таким образом узоры Пенроуза помогли понять структуру вновь открытого вещества. И не только этого вещества: найдены и другие реальные квазикристаллы, их экспериментальное и теоретическое изучение находится на переднем крае современной науки.

Новости науки

Антипротон в ловушке

Еще сто лет назад многие не верили в реальность существования атомов. «То, чего нельзя увидеть, не может существовать» — примерно такой аргумент считался неоспоримым. Теперь он кажется просто нелепым, поскольку не только атомы, но даже и отдельные элементарные частицы стали сейчас реальными объектами исследований.

Счетчики в лабораториях регистрируют нейтроны, фотоны, электроны и т. п. Установки, составленные из большого числа специальных детекторов, скрытых высоко в горах, фиксируют нейтрино, прилетающие к нам из космоса. Но физики могут не только считать количество частиц, они научились их изучать, так сказать, поштучно.

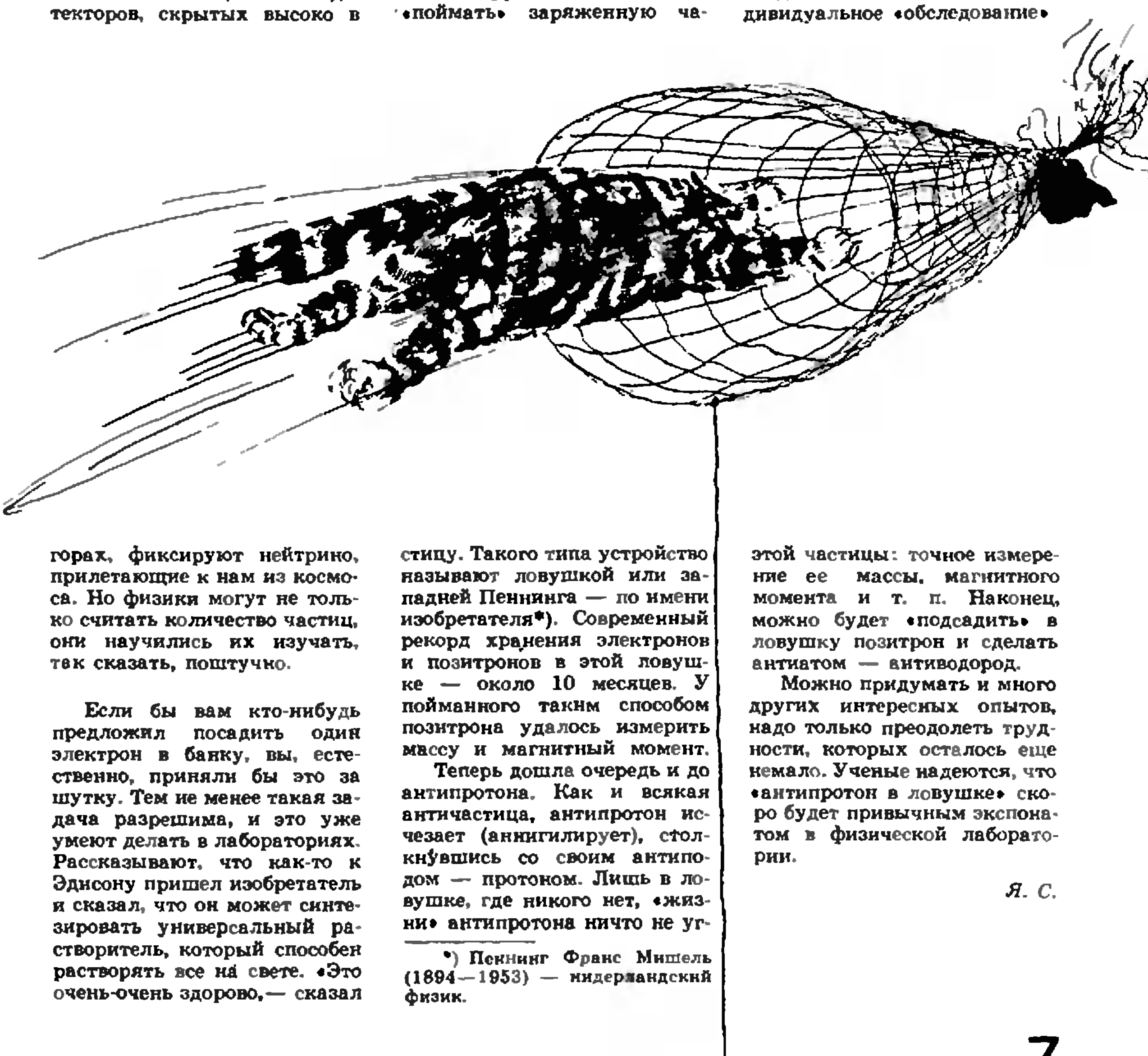
Если бы вам кто-нибудь предложил посадить один электрон в банку, вы, естественно, приняли бы это за шутку. Тем не менее такая задача разрешима, и это уже умеют делать в лабораториях. Рассказывают, что как-то к Эдисону пришел изобретатель и сказал, что он может синтезировать универсальный растворитель, который способен растворять все на свете. «Это очень-очень здорово,— сказал Эдисон,— но в чем вы будете хранить Вашу замечательную жидкость?». Так и с электроном. Ясно, что он не сможет жить в сосуде, даже если там создать максимально возможный вакуум, — электрон просто «прилипнет» к стенке.

И все же электрон, а также и антиэлектрон — позитрон — хранить можно, причем хранить долго. Ловушку для электрона или позитрона можно создать с помощью электрического и магнитного полей. В магнитном поле электрон движется по окружности или спирали. Электрическое поле, созданное в конденсаторах специальной формы, не дает заряженной частице убежать по спирали. Комбинируя оба поля, можно «поймать» заряженную частицу. Такого типа устройство называют ловушкой или западней Пеннинга — по имени изобретателя*). Современный рекорд хранения электронов и позитронов в этой ловушке — около 10 месяцев. У пойманного таким способом позитрона удалось измерить массу и магнитный момент.

Теперь дошла очередь и до антипротона. Как и всякая античастица, антипротон исчезает (аннигилирует), столкнувшись со своим антиподом — протоном. Лишь в ловушке, где никого нет, «жизни» антипротона ничто не угрожает. Однако поймать его в ловушку не так-то просто. Дело в том, что антипротон рождается в ускорителе со скоростью, почти равной скорости света, и такую быструю частицу удержать очень трудно.

Тем не менее задача поимки антипротона разрешима. Сейчас научились тормозить его движение, снижая энергию от нескольких ГэВ (10^9 эВ) до нескольких десятков кэВ (10—30 тысяч эВ). При таких энергиях антипротон уже удается посадить в ловушку Пеннинга, в которой он совершает колебательные движения — как тигр в клетке — с большой частотой, но выскочить наружу не может.

В первых опытах антипротон удерживался в ловушке несколько часов. Физики считают, что срок «заточения» можно увеличить в сотни раз. Тогда станет возможным индивидуальное «обследование» этой частицы: точное измерение ее массы, магнитного момента и т. п. Наконец, можно будет «подсадить» в ловушку позитрон и сделать антиатом — антиводород.



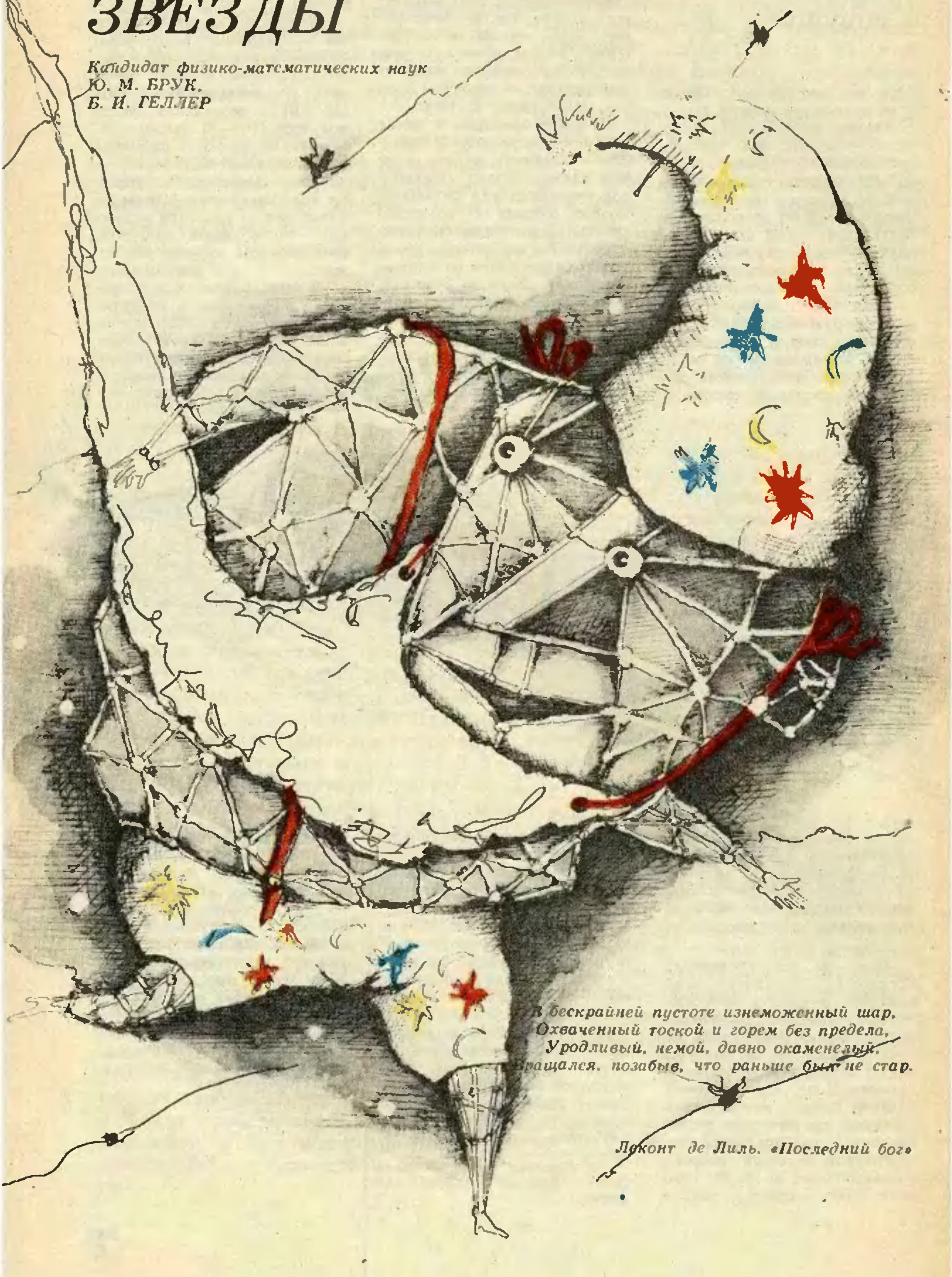
Можно придумать и много других интересных опытов, надо только преодолеть трудности, которых осталось еще немало. Ученые надеются, что «антипротон в ловушке» скоро будет привычным экспонатом в физической лаборатории.

Я. С.

*) Пеннинг Франс Мишель (1894—1953) — нидерландский физик.

БЕЛЫЕ КАРЛИКИ — КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДЫ

Кандидат физико-математических наук
Ю. М. БРУК,
Б. И. ГЕЛЛЕР



В бескрайней пустоте изнеможенный шар,
Охваченный тоской и горем без предела,
Уродливый, немой, давно окаменелый,
Вращался, позабыв, что раньше был не стар.

Леконт де Лиль. «Последний бог»

В этой статье мы постараемся рассказать о том, что нельзя увидеть ни в микроскоп, ни в телескоп, но что можно понять с помощью довольно простых и привычных представлений. Речь пойдет в основном о белых карликах и ... конденсаторах. Что такое конденсатор, знают, конечно, все читатели «Кванта». Про белые карлики читатели тоже, вероятно, слышали. Так называются очень плотные звезды с массой примерно такой же, как у нашего Солнца, но с радиусом в несколько сотен или даже в тысячу раз меньшим солнечного. Разглядеть, как устроены внутренности белого карлика, мы, конечно, не можем. Но, порассуждав о плоском конденсаторе, мы сможем, воспользовавшись физическими аналогиями, получить представление о том, как устроены эти далекие и мало похожие на Солнце звезды.

Немного простых вычислений

Масса типичного белого карлика $M\sim 2\cdot 10^{30}$ кг, его радиус $R\sim 10^{-2}R_{\odot}$ ($R_{\odot}=7\cdot 10^{8}$ м — радиус Солнца). Среднюю плотность вещества, из которого состоит карлик, мы получим, разделив массу звезды на ее объем: ρ оказывается $\sim 10^{9}$ кг/м^3.

Если бы мы пожелали «построить» белый карлик из отдельных атомов, мы должны были бы собрать их в большое облако вблизи той «точки» в пространстве, куда хотим «поместить» звезду, и сжать это облако до плотностей примерно в 10^{6} раз бо́льших, чем средняя плотность нашей планеты. В космическом пространстве облака из молекул или атомов сжимаются под действием сил гравитации.

Реальные белые карлики, как это вытекает из теории строения и эволюции звезд, содержат мало «тяжелых» элементов или даже совсем их не содержат. Для оценок можно считать, что белый карлик «построен» из одинаковых атомов, имеющих примерно по десятку электронов на атом. Массу m атома при этом можно принять примерно в 20 раз большей массы нуклона, т. е. считать $m\sim 10^{-26}$ кг. Разницей масс нуклонов (протона и нейтрона), а также массой электронов при грубом расчете можно, конечно, пренебречь. Это вполне разумные допущения, и они фактически не повлияют на те выводы, к которым мы придем.

Число n атомных ядер в единице объема получится, если разделить ρ на m. Для нашего белого карлика n оказывается $\sim 10^{35}$ м$^{-3}$. Значит, средний объем пространства, приходящегося на одно ядро, $\sim 10^{-35}$ м^3, и среднее расстояние между ядрами $\sim 10^{-12}$ м. Размеры же обычных атомов порядка 10^{-10} м. Так что мы приходим к выводу, что средние расстояния между ядрами внутри белого карлика в сотню раз меньше размеров тех атомов, из которых мы «начинали строить» звезду. Понятно, что при столь больших плотностях атом как система «электроны+ядро» не существует.

В процессе сжатия все электроны в недрах белого карлика уже «отодраны» от своих ядер и образуют электронную жидкость. А как ведут себя ядра (которые можно назвать в таком случае «голодранцами»)? Для них существуют две возможности: они либо «плавают» в «электронном море», напоминая взвесь тяжелых частиц в жидкости, либо образуют кристаллическую решетку, в которую и «налита» электронная жидкость,— тогда система ядер и электронов подобна по структуре обычным металлам.

Какая же из указанных возможностей реализуется на самом деле? Белые карлики — жидкие? или кристаллические?

Наша цель — разобраться в этом вопросе. И поможет нам, как это ни удивительно на первый взгляд, плоский конденсатор.

Плоский конденсатор и плазменная частота

Совокупность электронов и ядер внутри белого карлика образует плазменную систему, которая похожа на плазму в недрах Солнца или на плазму, образующуюся при обычном газовом разряде. Общим для этих систем является сосуществование положительно и отрицательно заряженных частиц, взаимодействие между которыми обусловлено кулоновскими силами. (О том, чем существенно отличается плазма в белых карликах от классической кулоновской системы заря-

дов с противоположными знаками, мы поговорим позже.) В целом плазменные системы электронейтральны. А что произойдет, если в какой-то небольшой области пространства электронейтральность нарушится?

Рассмотрим элемент объема, занятого плазмой, между двумя плоскими площадками. Сначала обсудим простой случай, когда положительные и отрицательные заряды в плазме одинаковы по абсолютной величине. Пусть площадь каждой площадки S, а расстояние между ними d. Заряды частиц будем считать равными $\pm e$, а их концентрацию равной n_e. Предположим, что мы смогли разделить заряды в этом объемчике и поместить все положительные заряды на одну площадку, а все отрицательные — на другую. По существу мы создали заряженный плоский конденсатор. Очевидно, что абсолютная величина заряда пластин этого конденсатора $Q = n_e eSd$, и напряженность поля в нем $E = Q/\varepsilon_0 S = n_e ed/\varepsilon_0$.

В реальной плазме никаких площадок-пластин, конечно, не существует, но ясно, что взаимное смещение зарядов разных знаков приводит к появлению сил, стремящихся это смещение ликвидировать. Для оценки этих сил можно рассуждать так. Пусть среднее относительное смещение частиц с противоположными зарядами равно d. Появившееся при смещении электрическое поле можно оценить, пользуясь приведенной выше формулой для конденсатора. Сила, действующая на одну частицу, равна $eE = n_e e^2 d/\varepsilon_0$; разделив эту силу на массу частицы m, получим ее ускорение: $n_e e^2 d/\varepsilon_0 m$. Обратите внимание: сила и ускорение частицы пропорциональны ее смещению, а направлены они так, чтобы восстановить равновесие. Но это означает, что частица будет совершать гармонические колебания, и мы можем сразу же сказать, какова должна быть частота этих колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}. \qquad (*)$$

Колебания с частотой ω_0 называют электростатическими, ленгмюровскими или просто плазменными.

Вероятно, читатель уже догадался, какой следующий шаг мы собираемся сделать в наших рассуждениях. Конечно, мы должны попытаться понять, нельзя ли обобщить эти рассуждения о плазменных колебаниях на электронно-ядерную плазму в белых карликах. Ответ на этот вопрос положительный, такое обобщение действительно возможно. В электронно-ядерной плазме тоже должны быть колебания, обусловленные взаимными смещениями зарядов. Но этот случай отличается от рассмотренного выше простейшего тем, что заряд ядра не равен заряду электрона. Разные у них и массы. И очень важно, что концентрация частиц в плазме белого карлика в сотни тысяч раз больше, чем, скажем, в солнечной плазме. При таких концентрациях плазму нужно описывать квантовыми законами (тогда как солнечную плазму можно считать классическим газом заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона). Оказывается к тому же, что вопрос о плазменных колебаниях в белых карликах тесно связан с вопросом о возможности существования в них кристаллических структур. Обсуждением этих вопросов мы теперь и займемся.

Ядерные кристаллы и устойчивость кристаллической решетки

Одно из самых обычных и привычных для нас фазовых превращений — это кристаллизация. Никого не удивляет, что зимой реки и озера покрываются льдом. Замерзают порой даже моря. Но разве не удивительно, что кристаллизация может происходить и в плазменном море, образуемом электронами и атомными ядрами внутри белых карликов?

В ранних теориях белых карликов считалось, что вещество при плотностях, типичных для внутренних об-

ластей этих звезд, представляет собой жидкую смесь ядер и электронов. Ядра в таком «растворе», как и частицы в обычных жидкостях, могли бы «без особых усилий» перемещаться на довольно значительные расстояния, движение их при этом могло бы быть совершенно хаотическим. Идеи о построении и устойчивости решеток из атомных ядер, погруженных в электронное море, появились немногим более двадцати лет назад.

Давайте и мы предположим, что атомные ядра с зарядами Ze действительно образуют кристаллическую решетку, т. е. «привязаны» к определенным местам в пространстве. Окружающие их электроны «вольны», конечно, «гулять» по всему этому кристаллу, но в среднем около каждого ядра находится Z электронов. Разрушение решетки было бы, очевидно, возможно, если бы ядра могли сильно смещаться из своих положений равновесия. Малые же колебания ядер к разрушению решетки не приводят.

В обычных твердых телах колебания кристаллической решетки имеют в основном температурное происхождение. Для ядерного же кристалла очень важную роль играет кулоновское взаимодействие. Колебания плазменного типа будут происходить при любых температурах, в том числе и при очень низких. Наша цель сейчас — оценить частоту и энергию этих колебаний и сравнить последнюю с потенциальной энергией ядра в кристаллической решетке и с величиной kT, характеризующей температурные колебания. Если потенциальная энергия окажется намного больше kT и характерной энергии плазменных колебаний, то мы сможем сказать, что ядро «привязано» к «своему» узлу в кристаллической решетке.

Удобно разделить всю нашу систему «ядра+электроны» на условные ячейки, имеющие сферическую форму и такие, что в каждой из них находится одно ядро с зарядом Ze и Z электронов. Если в единице объема содержится $n_{\text{я}}$ ядер, то радиус r ячейки можно определить из условия $\frac{4}{3}\pi r^3 n_{\text{я}}=1$; отсюда $r\sim n_{\text{я}}^{-1/3}$. В целом каждая такая ячейка электронейтральна. Так как число электронов $Z\gg 1$, можно для оценок считать, что электроны, образующие облако с отрицательным зарядом, равномерно «размазаны» по ячейке. Колебания же ядра в этом отрицательно заряженном облаке происходят с плазменной частотой

$$\Omega_0^2\sim\frac{n_{\text{я}}(Ze)^2}{\varepsilon_0 m_{\text{я}}}\sim\frac{Z^2e^2}{\varepsilon_0 m_{\text{я}} r^3}.$$

Это по существу та же формула (*). Но только сейчас речь идет о колебаниях ядер с зарядом Ze и массой $m_{\text{я}}$.

Мы уже упомянули, что из-за большой концентрации частиц плазма в белом карлике описывается квантовыми законами. Естественно, что и колебания в такой плазме должны квантоваться. Это значит, в частности, что полная энергия колебаний кристаллической решетки, построенной из атомных ядер, складывается из отдельных порций — квантов энергии. Зная частоту колебаний, легко оценить и энергию такой порции. Для этого надо частоту Ω_0 умножить на постоянную Планка $\hbar$ $\left(\hbar=\frac{h}{2\pi}\right)$. Величина $\hbar\Omega_0$ и есть характерная энергия плазменных колебаний, относящаяся к одной колеблющейся частице, в нашем случае — к одному ядру. Здесь уместно еще сказать, что для типичных условий внутри белых карликов энергия kT тепловых колебаний (опять же в расчете на одну частицу) много меньше, чем $\hbar\Omega_0$. Это позволяет нам «забыть» о температуре, говоря о колебаниях кристаллической решетки белого карлика. (Желающие могут убедиться в справедливости неравенства $kT\ll\hbar\Omega_0$, подставив в формулу для Ω_0 численные значения параметров, характерные для белых карликов, и приняв для оценки температуру T внутри белого карлика $\sim 10^6$ К.)

Итак, нам остается сравнить U_0 и $\hbar\Omega_0$. Потенциальная энергия ядра, «сидящего» в узле кристаллической решетки, $U_0 \sim \frac{Z^2e^2}{\varepsilon_0 r}$. Иногда говорят, что эта обычная «кулоновская» формула определяет «глубину потенциальной ямы», в которую «попало» колеблющееся ядро. Можно сказать еще, что U_0 определяет энергию связи ядра в системе окружающих его других частиц.

Запишем теперь отношение $\hbar\Omega_0/U_0$, используя приведенные выше формулы для Ω_0 и U_0:

$$\frac{\hbar\Omega_0}{U_0} \sim \left(\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{Z^2e^2rm_я}\right)^{1/2} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}.$$

Здесь $r_0 = \frac{\hbar^2\varepsilon_0}{Z^2e^2m_я}$ — параметр, характеризующий ядро с заданными Z и $m_я$. Типичное значение r_0/r для белых карликов — порядка 10^{-5}. (Это число вы можете получить сами, считая плотность вещества в звезде $\sim 10^9$ кг/м^3, а $Z \sim 10$.)

Тем самым мы убеждаемся, что $(r_0/r)^{1/2} \ll 1$, а это-то и означает, что энергия колебаний ядер внутри белого карлика меньше потенциальной энергии. Другими словами, кристаллическая решетка, если она образовалась, сама по себе развалиться не должна!

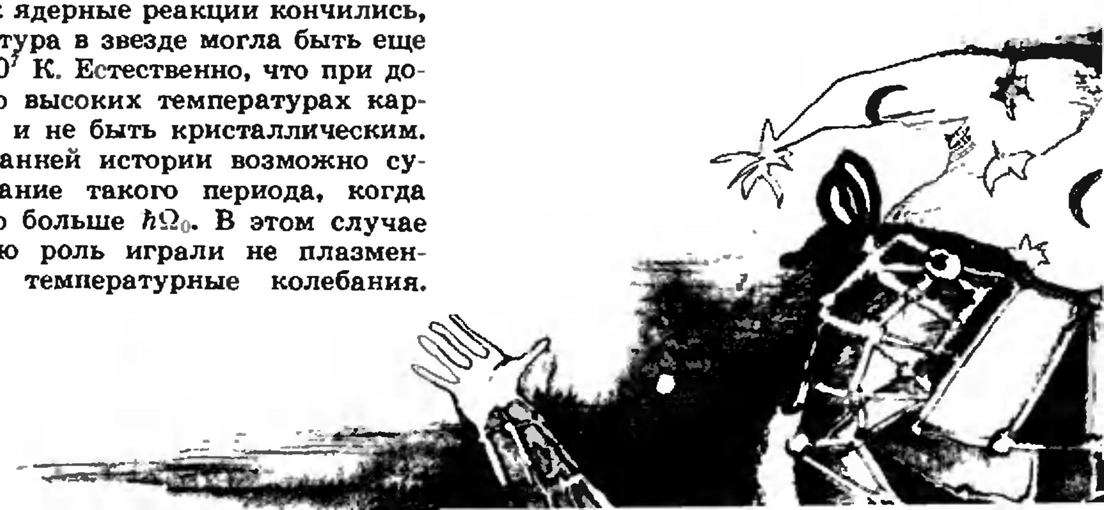
Кристаллизация в белом карлике

До сих пор мы обсуждали ситуацию, когда обусловленные температурой эффекты можно было не учитывать. В этом случае выполняется неравенство $\hbar\Omega_0 \gg kT$. Однако теория эволюции звезд предсказывает, что когда белый карлик был молодым, в его недрах шли ядерные реакции и он был довольно-таки горячим. После того как ядерные реакции кончились, температура в звезде могла быть еще около 10^7 К. Естественно, что при достаточно высоких температурах карлик мог и не быть кристаллическим. В его ранней истории возможно существование такого периода, когда kT было больше $\hbar\Omega_0$. В этом случае основную роль играли не плазменные, а температурные колебания. И для этого периода именно kT нужно сравнивать с U_0, чтобы решить вопрос о том, существовала ли тогда кристаллическая решетка.

Но, как бы то ни было, бóльшая часть жизни карлика проходит в условиях, когда $kT < \hbar\Omega_0 \ll U_0$. Поэтому по мере его остывания должна произойти кристаллизация. В кристаллизующейся звезде внутренние области все время остаются горячее наружных, поэтому кристаллическая структура — «корка» — возникает сначала именно снаружи, а уже потом «прорастает» в глубь карлика.

При кристаллизации выделяется энергия, которая в конечном счете звездой излучается. Расчеты показывают, что эта энергия не столь уж и мала. Естественно сравнить ее с полной гравитационной энергией звезды (так называется энергия, которая потребовалась бы, чтобы разрушить гравитирующий шар и «растащить» все составляющие его частицы на достаточно большие расстояния друг от друга). Сравнение позволяет утверждать, что энергия, выделяющаяся при кристаллизации, может достигать долей процента или даже несколько процентов от полной гравитационной энергии белого карлика. Другим источником энергии, излучаемой карликом, является запас его тепловой энергии. При условии близости температуры внутри звезды к температуре плавления кристаллической ядерной решетки (последняя по оценкам может быть порядка 10^7 К) запасы тепловой энергии могут оказаться сравнимыми с энергией кристаллизации. В принципе можно считать, что белый карлик после прекращения в нем ядерных реакций в состоянии излучить энергию порядка процента от его гравитационной энергии.

Гравитационная энергия звезды по



порядку величины равна GM^2/R; подставляя $M \sim 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R = 7 \cdot 10^6$ м, получим приблизительно $4 \cdot 10^{43}$ Дж. Средняя светимость горячих и ярких белых карликов порядка 10^{-2} $L_\odot$, где $L_\odot \approx 4 \cdot 10^{26}$ Вт — светимость нашего Солнца (светимость — это полная энергия, излучаемая за единицу времени). Зная это, легко подсчитать, что запасов энергии — тепловой и выделяющейся при кристаллизации — белому карлику должно хватить на излучение по крайней мере в течение 10^9 лет. Приведенные цифры являются, конечно же, лишь типичными значениями, для конкретных звезд они могут отличаться. Часто говорят, что конечными стадиями эволюции звезд могут быть белые карлики, нейтронные звезды или черные дыры. Оказывается, однако, что даже после «бурной молодости» звезды «не хотят умирать». Исчерпав запасы ядерной энергии, они сохраняют все же другие источники и запасы энергии, позволяющие им долго излучать и после того, как они дожили до своей «старости».

Можно теперь сформулировать и основной вывод нашего рассказа о белых карликах. Не очень горячие звезды этого типа должны быть кристаллическими; они кристаллизуются, как только их температура понижается примерно до 10^6 К.

Наблюдать белые карлики очень непросто, особенно если это холодные звезды (в астрономии их называют «красные» белые карлики). Слабый блеск и сложность их спектров требуют очень совершенных телескопов. В то же время сейчас известно несколько тысяч белых карликов, разбросанных в сфере радиусом 100 парсек (1 парсек $\approx 3 \cdot 10^{16}$ м) вокруг Солнечной системы. Всего же белые карлики составляют от 5 до 10 % всех звезд.

Состояние вещества белых карликов, несуществующее и недостижимое в земных условиях, нам очень важно знать и для физики нейтронных звезд — ведь их наружные слои состоят из вещества примерно с теми же параметрами, что и внутри белых карликов.

Приложение

О связи главных параметров белых карликов

Основными характеристиками любой звезды являются, конечно, ее масса, радиус, химический состав, температура и светимость. Разумеется, не все эти величины являются независимыми. Легко понять, например, что светимость должна быть связана с температурой — чем горячее звезда, тем больше она излучает. Мы приведем здесь пример другой связи — между массой белого карлика M, его радиусом R и отношением Z/A. Параметры Z и A — это номер в Периодической системе элементов и массовое число (т. е. число нуклонов) ядер тех атомов, из которых «построена» звезда. Для простоты будем считать, что белый карлик «построен» из одинаковых атомов (интересующую нас качественную картину это предположение не испортит).

Силы гравитации, сжимающие вещество звезды, создают внутри нее огромное гравитационное давление. Что «противостоит» этому давлению, что обеспечивает равновесие звезды? В случае звезд, подобных нашему Солнцу, гравитационному сжатию противостоит газовое давление (давление плазмы). В белых карликах гравитационное давление уравновешивается давлением электронной жидкости внутри звезды. Из условия равновесия $p_G = p_e$ можно получить формулу, связывающую интересующие нас параметры M, R, Z и A. Но сначала надо найти p_G и p_e. Мы сделаем это, воспользовавшись соображениями размерности.

Естественно предположить, что формула для гравитационного давления в центре звезды должна связать p_G с массой звезды M, ее радиусом R и гравитационной постоянной G. Выпишем размерности этих величин:

$$[p_G] = \text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2},$$
$$[M] = \text{кг},\ [R] = \text{м},\ [G] = \text{кг}^{-1}\text{м}^3\text{с}^{-2}.$$

Будем искать интересующую нас зависимость $p_G(G, M, R)$ в виде $p_G \sim G^x M^y R^z$. Запишем условие равенства размерностей левой и правой частей написанного соотношения:

$$\text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2} = \text{кг}^{-x}\text{м}^{3x}\text{с}^{-2x}\text{кг}^y\text{м}^z =$$
$$= \text{кг}^{-x+y}\text{м}^{3x+z}\text{с}^{-2x}.$$

Такое равенство может быть выполнено, только если

$$1 = -x + y,\ -1 = 3x + z,\ -2 = -2x.$$

Решая эту систему уравнений, получим: $x = 1$, $y = 2$, $z = -4$. Следовательно, искомая формула такова:

$$p_G \sim G\frac{M^2}{R^4}.$$

Теперь перейдем к определению p_e. Здесь полезно напомнить, что есть различие между классической солнечной плазмой (ее давление зависит от температуры) и электронной жидкостью в белых карликах. Для такой жидкости (иногда говорят — газа) действуют квантовые законы и давление p_e от температуры не зависит. Поэтому в формулу для электронного давления должна входить постоянная Планка $\hbar$. Естественно предположить, что p_e зависит еще от концентрации электронов n_e и массы электрона m_e. Запишем искомую формулу в таком виде: $p_e \sim \hbar^\alpha m_e^\beta n_e^\gamma$. Числа, α, β и γ определим, сравнивая размерности величин, стоящих слева и справа:

$$[p_e] = \text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2},\ [\hbar] = \text{кг}^1\text{м}^2\text{с}^{-1},$$
$$[m_e] = \text{кг},\ [n_e] = \text{м}^{-3}.$$

Из соотношения

$$\text{кг}^1\text{м}^{-1}\text{с}^{-2} = \text{кг}^\alpha\text{м}^{2\alpha}\text{с}^{-\alpha}\text{кг}^\beta\text{м}^{-3\gamma}$$

следует система уравнений

$$1 = \alpha + \beta,\ -1 = 2\alpha - 3\gamma,\ -2 = -\alpha,$$

откуда $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 5/3$. Интересующее нас давление —

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}.$$

При условии полной ионизации в плазме концентрация электронов n_e и концентрация ядер $n_я$ связаны соотношением $n_e = Zn_я$. Но $n_я \approx \approx \dfrac{\rho}{m_я} \sim \dfrac{M}{R^3 m_я} \approx \dfrac{M}{R^3 A m_p}$, где m_p — масса нуклона (различием масс протона и нейтрона мы пренебрегаем). Поэтому:

$$p_e \sim \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{ZM}{R^3 A m_p}\right)^{5/3}.$$

А теперь запишем условие равновесия $p_G = p_e$:

$$G\frac{M^2}{R^4} \sim \frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{ZM}{R^3 A m_p}\right)^{5/3},$$

или, после несложных преобразований,

$$M^{1/3}R \sim \frac{\hbar^2}{G m_e m_p^{5/3}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}.$$

Из последней формулы явно видно, что при фиксированном значении Z/A произведение MR^3 постоянно, и, стало быть, для разных карликов с одинаковыми отношениями Z/A массы M обратно пропорциональны R^3. Результат довольно любопытный!

„Квант" улыбается

Крокодил в конверте

Ольга Иеронимовна Капица улыбалась доброй материнской улыбкой. Письмо пришло от Пети. Правда, он уже не Петя, а Петр Капица, 27-летний физик, недавно принятый на стажировку в Кембридж, в лабораторию Резерфорда. Вскрыв конверт и посмотрев на дату, 25 октября 1921 года, стала читать. Сначала спокойное описание пребывания в Кембридже. И вдруг «...отношения с Резерфордом, или, как я его называю, «крокодилом», улучшаются». Что это — озорство? Мальчишество? Ну, ладно в школе — какие только клички не дают своим учителям ребята. Но ведь Петя далеко не школьник! Ученого с мировой известностью, наставника, к которому с таким трудом удалось попасть, и вдруг назвать КРОКОДИЛОМ!! Ведь если сотрудники узнают, узнает и сам профессор! Выгонит, честное слово, выгонит!

Все знали. Знал и Резерфорд. И не выгнал. Он тоже не был лишен чувства юмора. Через год в беседе с Резерфордом Капица напомнил шефу первый день их встречи. Тогда Резерфорд сказал, что все 30 мест в лаборатории заняты. Петр Леонидович спросил, какую точность допускает профессор в научной работе? Получив ответ — 2—3 %, Капица сказал, что один сотрудник в дополнение к 30 составляет всего около 3 % и что это не выходит за рамки требуемой точности. Профессор спрятал улыбку в усы... и принял молодого физика. Вспоминая это, Резерфорд добавил, что он этому очень рад.

Так почему же «крокодил»?

Петр Леонидович объяснял это так: «Это животное никогда не поворачивает назад и потому может символизировать резерфордовскую проницательность и его стремление к продвижению вперед».

В 1931 году «Крокодил» выхлопотал 15 тысяч фунтов стерлингов на постройку и оборудование специального здания лаборатории для Капицы. В феврале 1933 года в Кембридже состоялось торжественное открытие лаборатории. На торцевой стене 2-этажного здания был высечен по камню огромный, во всю стену крокодил. Его по заказу Капицы сделал известный скульптор Эрик Гилл. Резерфорд сам объяснил, что это он. Входную дверь открыли позолоченным ключом в форме крокодила.

Прошло около 60 лет, и когда сегодня вдоль здания этой лаборатории проходит группа туристов, на вопрос о крокодиле гид отвечает: «Это мимолетная шутка одного из учеников профессора Резерфорда». А ведь это не «мимолетная шутка», а Памятник. Памятник дружбе между учителем и учеником, английским физиком Резерфордом и советским физиком — основателем и первым директором Института физических проблем Петром Леонидовичем Капицей.

Вот о чем мог бы рассказать гид в Кембридже, ведя группу мимо здания лаборатории с ползущим по стене крокодилом.

В. З. Бульванкер

НЕСКОЛЬКО ДОПОЛНЕНИЙ К УРОКУ ЛИТЕРАТУРЫ,

или Еще раз о научном предвидении

Кандидат физико-математических наук
П. Б. БЕРНШТЕЙН

Рассказывают, что когда Давида Гильберта спросили о судьбе одного из его учеников, он сказал: «Ах, этот! Он стал поэтом. Для математика у него слишком мало воображения!».

Отдадим должное остроумию великого математика. Но ... Трудно сказать, какого ученого потеряла наука в лице упомянутого ученика, но думает-

ся, что литература приобрела не такого уж хорошего поэта. Ибо богатое воображение не однажды позволяло писателям и поэтам в своих произведениях предсказывать великие открытия и технические достижения.

Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить уже ставшие хрестоматийными строки, написанные в 1921 году известным поэтом-символистом Андреем Белым:

Мир — рвался в опытах Кюри
Атомной, лопнувшею бомбой
На электронные струи
Невоплощенной гекатомбой...

Вдумайтесь только — в 1921 году! За полтора десятка лет до того, как ученые-физики начали работать над созданием бомбы, и почти за четверть века до кошмара Хиросимы! Поразительно и указание пути — опыты Кюри,— и само слово «бомба», и понимание (или предчувствие?!) возможных последствий освобождения энергии атома: гекатомба — это массовое уничтожение, одновременная гибель множества людей. Так поэт провозгласил вступление в атомный век.

И этот пример не единственный.

Еще в 1623 году появился утопический роман английского философа-материалиста Фрэнсиса Бэкона «Новая Атлантида». (Если бы это произведение увидело свет два века спустя, его уже отнесли бы к жанру научно-фантастической литературы — жанру, которому «по долгу службы» свойственно заглядывать в будущее.) Говоря о научных достижениях жителей Новой Атлантиды, Бэкон пишет об изобретениях, осознанная потребность в которых могла возникнуть много позже. Зачем бы жителю XVII века понадобилось использовать «водопады, служащие для получения многих видов движения»? Уж не закон ли сохранения энергии открыли в Новой Атлантиде? Что общего (с точки зрения жителя XVII века) между падающей водой и сильными магнитами, если даже об электричестве, не говоря уж о гидроэлектростанциях, узна́ют много позже? И наконец, может быть лазер имел в виду английский мыслитель, когда устами одного из жителей Атлантиды говорил: «умеем ... усиливать свет, который передаем на большие расстояния и можем делать столь ярким, что при нем различимы мельчайшие точки и линии»? Причем, заметьте, жители прекрасной страны не собираются с помощью света воевать и добираться до подземных сокровищ, как спустя триста лет сделает другой литературный герой — инженер Гарин.

Следующий пример касается кибернетики (точнее — технической кибернетики). Конечно, никому не придет в голову покушаться на авторитет Норберта Винера. Но все-таки... Издавна в различных произведениях фигурировали «механические люди». Материалы и способы изготовления этих, пользуясь современной терминологией, роботов были различными. Так, средневековый алхимик Лев бен Бецалель, по преданию, изготовил своего Голема из глины. Отражена в литературе и попытка получить гомункулуса — существо, подобное человеку,— в колбе (см., например, «Фауст» Гёте). Но давайте откроем пьесу Карела Чапека «R. U. R.». В этой пьесе впервые прозвучало столь часто используемое сейчас слово — робот. Приведем лишь пару строк из этой пьесы: «...выпускать живые, наделенные интеллектом, рабочие машины», «...компания выпускает товар нескольких сортов ...есть роботы более примитивные и более сложные». Замечательный чешский писатель предсказал очень многие аспекты технической кибернетики, в том числе возможности изготовления роботами новых роботов, создания роботов с узкой специализацией и т. д...

Так в 1920 году роботы начали свое победоносное шествие. И очень скоро это понятие перекочевало в работы ученых.

Конечно же, заслуга Карела Чапека не в том, что он ввел слово, впоследствии понравившееся ученым (как это произошло со словом «кварк», услышанным в кошмарном сне героем английского писателя Джеймса Джойса «Поминки по Финнегану»: физики назвали кварками гипотетические фундаментальные частицы, из которых, как предполагают, состоят многие элементарные частицы). Строго говоря, и не Карел Чапек придумал слово «робот». Вот как он сам это описывает: «...в один прекрасный день ...автору пришел в голову сюжет ...пьесы. И пока железо было горячо, он прибежал с новой идеей к своему брату Йозефу, художнику, который в это время стоял у мольберта... Автор изложил сюжет так коротко, как только мог... „Но я не знаю, — сказал автор, — как мне этих искусственных рабочих назвать. Я бы назвал их лаборжи [по-видимому, от английского слова labour — П. Б.], но мне кажется, что это слишком книжно“. „Так назови их роботами“, — пробормотал художник, ...продолжая грунтовать холст...» В своей пьесе Чапек поставил вопрос об общественных последствиях технического прогресса, рассмотрел многие философские проблемы будущей науки — кибернетики. В дискуссии о пьесе он сказал: «Я хотел написать комедию, отчасти комедию науки, отчасти — комедию правды... Создание гомункулуса — идея средневековья; для того, чтобы она соответствовала условиям нашего века, процесс созидания должен быть организован на основе массового производства... Замысел человеческого разума вырвался в конце концов из-под власти человеческих рук, начал жить по своим законам». Думается, понятно, почему, создав механического (или, скорее, электронного) «человека», ученые вспомнили не Голема, не какого-нибудь другого гомункулуса, а роботов Карела Чапека.

И еще один пример. Кто разработал теорию многоступенчатого ракетного движения? Ответ на этот вопрос не затруднит никого. Конечно Константин Эдуардович Циолковский! Им высказаны многие основополагающие идеи, выведены формулы, указаны пути развития ракетной техники. Его вклад в науку общепризнан и неоспорим. Но идея (только идея!) о «двигателе с несколькими ступенями» была высказана в XVII веке французским писателем, поэтом и философом Сирано де Бержераком, имя которого конечно же известно многим по драме Э. Ростана. В произведении «Иной Свет, или Государства и империи луны», опубликованном в 1657 году, описан двигатель, с помощью которого герой добирается до нашего естественного спутника: «Как только пламя уничтожало один ряд ракет,— они были расположены по шесть штук,— благодаря запалу, помещенному в конце каждого ряда, загорался другой ряд»...

Поистине, нет предела человеческой фантазии. Но справедливости ради стоит заметить, что одно только богатое воображение не позволило бы писателям и поэтам стать предсказателями в науке. Необходимы и глубокие знания.

Борис Николаевич Бугаев, взявший себе литературный псевдоним «Андрей Белый», учился на физико-математическом факультете Московского университета.

Фрэнсис Бэкон окончил Кембриджский университет. Он обладал многими специальными знаниями, состоял в переписке с выдающимися учеными своего времени. Карл Маркс охарактеризовал его как «родоначальника английского материализма и всей современной экспериментирующей науки».

Карел Чапек учился в Сорбонне и в Пражском университете и был весьма сведущ во многих инженерных проблемах.

Одним из самых образованных людей своего времени был и Сирано де Бержерак. В салоне своего друга Пьера Гассенди — философа-материалиста, астронома, математика — Сирано встречался с Пьером Ферма, Рене Декартом; он интересовался теориями Коперника и Кеплера.

И в заключение хотелось бы привести без комментариев цитату из поэмы Семена Кирсанова «Зеркала» (1969 год):

«Но путь испытателя крут, особенно если беретесь за еще не изведанный труд. Сначала — гипотеза, нить... Но не бойтесь гипотез! Лучше жить в постоянных ушибах, спотыкаясь, ища. Но однажды сквозь мусор ошибок выглянет ключ. Возможно, что луч, ложась на стекло под углом, придает составным особый уклон, и частицы встают, как иглы ежа: каждая — снимок, колючий начес световых невидимок. (...)

Но цель еще далека, а стекло безответно и гладко. Но уже шевелится догадка! Что, если выпрямить иглы частиц, возвратить, воскресить отражение? Я на верном пути! Так идти — от решения к решению, ни за что не назад! Нити лазеров скрещиваются и скользят. Вот уже что-то мерещится!».

Простите за длинную цитату, но мне кажется, что она имеет отношение к теме заметки. Что же мерещится? Не так интересно, если голография, а может быть, машина времени?...

„Квант" улыбается

О классификации

В 1984 году в издательстве «Наука» вышла книга члена-корреспондента АН СССР Л. Б. Окуня «Физика элементарных частиц». Книга эта имеет своеобразную структуру. В ней для облегчения чтения основной части, носящей специальный характер, приведен словарь терминов. Один из терминов — «адроны» — в свое время был предложен самим Львом Борисовичем и получил международное признание. Интересно объяснение термина «классификация», которое мы здесь полностью воспроизводим.

Классификация — распределение объектов или явлений по классам. Многочисленные примеры различных типов классификации встречаются на страницах этой книги.

Интересный пример классификации, лежащий вне рамок физики, приведен в книге «Слова и вещи» современного французского философа М. Фуко. По словам Фуко, эта классификация взята им из книги аргентинского писателя Хорхе Луиса Борхеса, который в свою очередь якобы цитирует некую восточную энциклопедию. Я не нашел этой цитаты в книгах Борхеса и привожу ее в том виде, как она дана у Фуко:

«Животные подразделяются на: а) принадлежащих Императору, б) бальзамированных, в) прирученных, г) молочных поросят, д) сирен, е) сказочных, ж) бродячих собак, з) включенных в настоящую классификацию, и) буйствующих, как в безумии, к) неисчислимых, л) нарисованных очень тонкой кисточкой из верблюжьей шерсти, м) и прочих, н) только что разбивших кувшин, о) издалека кажущихся мухами».

Если классификация какого-либо раздела физики чем-то напоминает вам эту классификацию животных, то, значит, вы еще недостаточно овладели данным разделом. Изучайте его до тех пор, пока сходство не пропадет.

Задачи

М1046—М1050, Ф1058—Ф1062

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 сентября 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6-87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1046» или «Ф1058». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

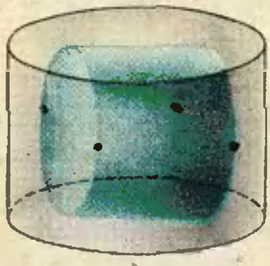


Рис. 1.

М1046. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $60°$. Докажите, что одна из биссектрис угла, образованного высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности этого треугольника.

В. Погребняк, ученик 10 кл., Винница

М1047. В шахматном турнире, проводимом в один круг, не менее $3/4$ всех сыгранных к некоторому моменту партий закончились вничью. Докажите, что в этот момент некоторые два участника набрали одинаковое число очков.

М. Бона, ученик гимназии, Венгрия

М1048*. Один из двух играющих («начинающий») ставит на некоторую клетку шахматной доски коня. Затем игроки по очереди передвигают коня по обычным правилам (буквой «Г»), при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто может добиться победы (независимо от действий противника) — начинающий или его партнер а) на доске 8×8; б) на доске $m\times n$, где $m\geqslant n\geqslant 3$?

В. Зудилин, ученик 10 кл., Бельцы

М1049. Будем говорить, что в цилиндр $Ц_1$ *вписан боком* другой цилиндр $Ц_2$, если две образующие второго цилиндра лежат на основаниях первого, а четыре точки окружностей основания второго — на боковой поверхности первого (рис. 1). Взяв цилиндр $Ц_1$, у которого отношение диаметра к высоте равно k, впишем в него боком (если это возможно) цилиндр $Ц_2$, в него впишем боком $Ц_3$, в него — $Ц_4$ и т. д. При каких значениях k

а) можно вписать $Ц_2$, но нельзя $Ц_3$;

б)* можно вписать $Ц_{10}$, но нельзя $Ц_{11}$;

в)* можно вписать бесконечную последовательность $Ц_n$ ($n=1, 2, \ldots$)?

В. Столин, ученик 11 кл., Вильнюс

М1050. На отрезке $[-1, 1]$ выбрано k различных точек, для каждой посчитано произведение расстояний до остальных $k-1$ точек и через S обозначена сумма обратных величин этих k произведений. Докажите, что а) $S\geqslant2$ при $k=3$; б)* $S\geqslant4$ при $k=4$.

Л. Д. Курляндчик

Ф1058. Шарик катится вдоль ребра прямоугольного желоба ACB (рис. 2) со скоростью v без проскальзывания; расстояние AB равно радиусу шарика. Какие точки шарика обладают максимальной скоростью? Чему равна эта скорость?

С. С. Кротов

Ф1059. В некоторой точке пространства необходимо создать максимально возможную напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения), имея в распоряжении заданную массу вещества неизменной плотности.

а) Какую форму необходимо придать веществу?

б) Каково должно быть взаимное расположение тела и точки?

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Задачник „Кванта"

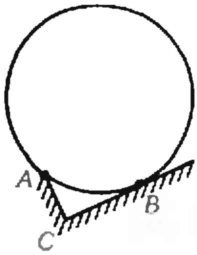


Рис. 2.

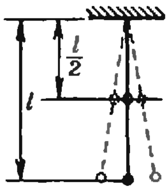


Рис. 3.

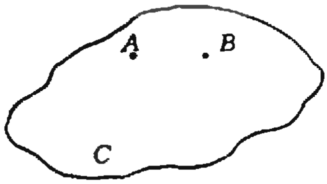


Рис. 4.

Ф1060. Математический маятник представляет собой невесомый стержень длиной l, к свободному концу которого прикреплен маленький массивный грузик. На стержень надета бусинка такой же массы, которая может свободно скользить по горизонтальной направляющей, проходящей на уровне середины стержня (рис. 3). Найти период малых колебаний такого маятника. Трение отсутствует.

Л. Г. Маркович

Ф1061. Пламя спиртовки, перед тем как погаснуть, начинает мерцать и потрескивать. Почему?

А. С. Бутов

Ф1062. Космическая частица, движущаяся со скоростью, близкой к скорости света, попадает в резервуар экспериментальной установки, наполненной жидкостью с показателем преломления $n=1{,}6$. Прохождение частицы через жидкость сопровождается свечением. Через небольшой промежуток времени после попадания частицы в резервуар был включен прибор, находящийся в точке C, который зафиксировал в момент включения две светящиеся точки A и B (схема опыта в определенном масштабе приведена на рисунке 4; дан вид сверху, точки C, A и B лежат в горизонтальной плоскости). Объясните наблюдавшееся явление и, используя рисунок, найдите скорость частицы. Торможением частицы в жидкости пренебречь.

А. И. Буздин

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than 1 st september 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" adn the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correctiou results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant

Problems

M1046—M1050, P1058—P1062

M1046. In the acute triangle ABC the angle A is 60°. Prove that one of the bissectors of the angle between the two altitudes drawn from the vertices B and C passes through the circumcircle of the triangle.

V. Pogrebnyak, 10th form student, Vinnitsa

M1047. In a one round chess tournament no less than 3/4 of the games concluded at some moment were drawn. Prove that at this moment at least two players had the same number of points.

Miklos Bona, gymnasium student, Hungary

M1048*. The first of two players places a knight on an empty chessboard. Then the players make ordinary moves in turn with the knight, never placing it in a position which it occupied before. The player who can't mske such a move loses. Who can win (independently of his opponent's moves) — the first player or the second a) on an 8 by 8 board; b) on an m by n board, where $m \geqslant n \geqslant 3$?

V. Zudilin, 10th form student, Beltsy

M1049. We say the cylinder C_1 is *inscribed sideways* in the cylinder C_2 if two generators of the second cylinder lie on the base of the first, and four points of the base circle of the second are on the lateral surface of the first (see figure Рис. 1). Taking a cylinder C_1 whose altitude to diameter ratio is k, inscribe (if possible) a cylinder C_2 into C_1 sideways, then a cylinder C_3 into C_2 sidewsys, etc. For what values of k is it possible to
a) inscribe C_2, but not C_3;
b)* inscribe C_{10}, but not C_{11};
c)* inscribe an infinite sequence C_n, $n=2, 3, \ldots$?

V. Stolin, 11th form student, Vilnius

M1050. If k distinct points are chosen on the closed interval $[-1, 1]$ and the product of distances from a chosen point to the other $k-1$ points is computed for each chosen point, we denote by S the sum of inverses of these k products. Prove that a) $S \geqslant 2$ if $k=3$; b) $S \geqslant 4$ if $k=4$.

L. D. Kurlyandchik

problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1058. A ball bearing rolls along the side of a rectangular trough ACB (see figure Рис. 2) with velocity v without slipping; the distance AB is equal to the ball's radius. What points of the ball have maximal velocity? Find this velocity.

S. S. Krotov

P1059. At some point of space it is necessary to create the strongest possible gravitational field using a given mass of matter of constant density.
a) What shape should the matter be given?
b) How should the body be placed with respect to the point?

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P1060. A mathematical pendulum consists of a weightless rod of length l whose free extremity is supplied with a small massive weight. There is a small bead of the same mass on the rod; this bead slides freely along a horizontal directrix on the level of the rod's midpoint (see figure Рис. 3). Find the period of small oscillations of this pendulum. Friction is negligible.

L. G. Markovich

P1061. Before going out, the flame of an alcohol lamp flickers and crackles. Why?

A. S. Butov

P1062. A cosmic particle moving with velocity near to that of light enters the reservoir of an experimental apparatus filled with a liquid of refraction index $n=1.6$. As the particle passes through the liquid, it scintilliates. In a small period of time after the particle entered the reservoir the instrument C was turned on and registered two scintillating points A and B (a scheme of the experiment in a certain scale is shown on figure Рис. 4; it shows the experiment from above the points C, A and B being in the horizontal plane, $CA:AB:BC=1.5:1:2$). Explain the observed effect and, using the picture, determine the velocity of the particle. The slowing down of the particle by the liquid is negligible.

A. I. Buzdin

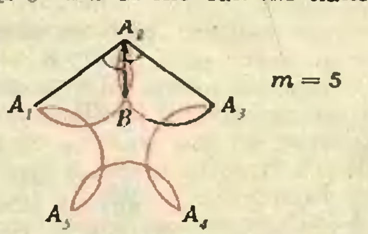
Решения задач

M1026—M1030, Ф1038—Ф1042

M1026. *а) Пять равных дуг AB, BC, CD, DE, EA расположены так, что каждая делится соседними на три равные части. Найдите величину каждой дуги (в градусах).*
б) Тот же вопрос для «розетки» из m равных дуг, каждая из которых делится соседними на три равные части.

Ответ: а) 54°; б) $(1-2/m)\,270°$.

Решим задачу сразу в общем случае. Концы данных m дуг образуют m-угольник $A_1A_2...A_m$ (см. рисунок). Пусть B — точка пересечения дуг A_1A_2 и A_2A_3. Если угловая величина каждой дуги равна 3α, то $\angle A_1A_2B=\alpha$ (половина величины дуги A_1B), $\angle A_3A_2B=\alpha$, следовательно, $\angle A_1A_2A_3=2\alpha$. Точно так же находим, что все



углы многоугольника $A_1A_2...A_m$ равны 2α. А поскольку их сумма равна $(m-2)180°$, получаем уравнение $2m\alpha=(m-2)180°$, откуда $\alpha=(1-2/m)90°$, т. е. величина каждой из дуг — $(1-2/m)270°$.

А. В. Швецов

M1027. *Докажите, что число $1985!!+1986!!$ делится на 1987. (Через $n!!$ обозначается произведе-*

Поскольку $1986!!=(1987-1)(1987-3)(1987-5)...$ $...(1987-1985)$, остаток от деления этого числа на 1987 равен остатку от деления произведения

$$(-1)(-3)(-5)...(-1985)=(-1)^{1986/2}1985!!=-1985!!$$

ние всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность, т. е. $n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$)

на 1987, следовательно, $1985!!+1986!!$ делится нацело на 1987.

Заметим, что согласно так называемой *теореме Вильсона* $(p-1)!+1$ делится на p при любом простом p, число $1986!=1985!!\cdot1986!!$ при делении на 1987 дает в остатке 1, поскольку 1987 — число простое. Поэтому остаток от деления одного из чисел $1985!!$ или $1986!!$ на 1987 равен 1 (а другого — 1986). Какого именно — мы предлагаем выяснить читателям.

В. В. Произволов

М1028. *а) На плоскости заданы две пересекающиеся прямые и на них отмечено по одной точке (D и E). Постройте треугольник ABC, у которого биссектрисы AE и CD лежат на данных прямых, а их основания — данные точки E и D.*
б) Докажите, что если при этом $\angle CDE=30°$, то один из углов треугольника ABC равен 60° или 120°.*

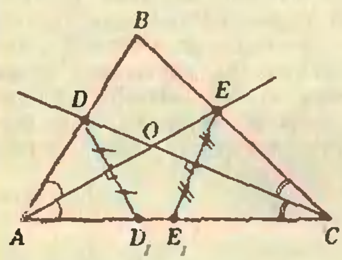


Рис. 1.

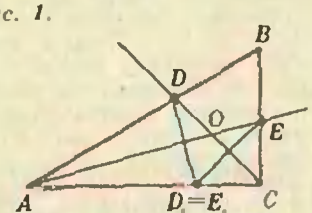


Рис. 2.

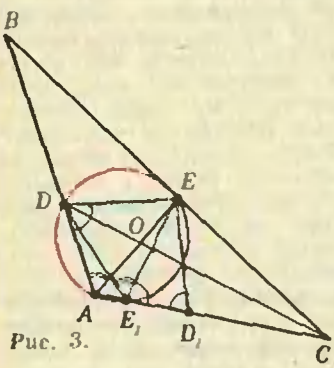


Рис. 3.

а) Заметим, что прямая AC должна проходить через точки D_1 и E_1, симметричные D и E относительно данных прямых (рис. 1). Отсюда вытекает следующее построение:

отражаем точки D и E относительно данных прямых OE и OD (O — точка их пересечения); проводим через их образы D_1 и E_1 прямую до пересечения с DO — в точке C и с EO — в точке A (если $D_1=E_1$, то прямую через D_1 проводим произвольно, но так, чтобы она пересекала лучи DO и EO, рис. 2); находим третью вершину B искомого треугольника как точку пересечения прямых AD и CE.

Это построение не всегда осуществимо: может оказаться, что $D_1E_1\parallel DO$, $D_1E_1\parallel EO$ или $AD\parallel CE$. Но и в том случае, когда треугольник «построится», прямые AE и CD могут оказаться биссектрисами не внутренних, а внешних его углов. Из равенств

$$\angle DOE=\angle AOC=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=90°+\frac{1}{2}\angle B \qquad (1)$$

следует, что задача разрешима только при $\alpha=\angle DOE>90°$. Но это условие не является еще достаточным. Дополнительно надо гарантировать существование точек A и C, а также чтобы точки D, O и E лежали по одну сторону от прямой AC. Можно показать, что задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$-2\cos\alpha<DO:EO<-1/2\cos\alpha \text{ при } \alpha\neq120°$$

(в этом случае решение единственно) или когда

$$DO=EO,\ \alpha=120°$$

(в этом случае $D_1=E_1$, решений бесконечно много). Подробности исследования оставляем читателям.

б) Построим точки D_1 и E_1, как в решении задачи а). Треугольник DEE_1 — правильный ($\angle EDE_1=2\angle EDO=60°$, $DE=DE_1$). Если $D_1=E_1$ (рис. 2), то DO и EO — биссектрисы этого треугольника, следовательно, O — его центр и $\angle DOE=120°$. По равенству (1) угол B равен 60°.

Пусть теперь $D_1\neq E_1$ (рис. 3). Поскольку $EE_1=ED=ED_1$, треугольник D_1EE_1 — равнобедренный, а значит,

$$\angle EE_1A=180°-\angle ED_1A=180°-\angle EDA \qquad (2)$$

(здесь мы пользуемся тем, что точки E_1 и D_1 лежат внутри угла AOC, т. е. по одну сторону от A, так как угол DOE — тупой). Из равенства (2) следует, что точки A, D, E и E_1 лежат на одной окружности (рис. 3). Поэтому $\angle EAD=\angle EE_1D=60°$, а $\angle BAC=2\angle EAD=120°$.

М. Волчкевич, В. Н. Дубровский

М1029. *Среди n членов арифметической прогрессии удалось выбрать k членов, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Докажи-*

Поделим все члены геометрической прогрессии на первый и выпишем их по возрастанию. Тогда она примет вид $1, q, \ldots, q^{k-1}$, где $q>1$. Все эти числа входят в некоторую n-членную арифметическую прогрессию; ее будем тоже считать возрастающей (иначе поменяем знак ее разности). Члены арифметической прогрессии,

те, что
$$n\geqslant 2^{k-1}.$$

меньшие 1 и большие q^{k-1}, отбросим; при этом ее длина не увеличится; можно считать с самого начала, что ее первый член равен 1, а последний, n-й, равен q^{k-1}; тогда $q^{k-1}=1+(n-1)d$, где d — разность арифметической прогрессии, $d>0$, так что $n=1+(q^{k-1}-1)/d$.

Поскольку каждое из чисел q^m, $m=1,\dots,k-1$, входит в арифметическую прогрессию с первым членом 1 и разностью d, число $(q^m-1)/d$ является номером q^m как члена арифметической прогрессии, т. е. является натуральным. Отсюда следует, что отношение
$$\frac{(q^2-1)/d}{(q-1)/d}=q+1$$
рационально, а значит, q и d — рациональные числа. Представляем их в виде несократимых дробей: $q=u/v$, $d=a/b$; тогда
$$\frac{q-1}{d}=\frac{u-v}{a}\,\frac{b}{v},\quad \frac{q^{k-1}-1}{d}=\frac{u^{k-1}-v^{k-1}}{a}\,\frac{b}{v^{k-1}}.$$
Правые части этих равенств — натуральные числа, причем u и v, а также a и b взаимно просты, следовательно, $u-v$ делится на a, а b делится на v^{k-1}, т. е. $u-v\geqslant a$, $b\geqslant v^{k-1}$, причем $u>v\geqslant 1$. Теперь утверждение задачи вытекает из такой оценки:
$$n=1+\frac{u^{k-1}-v^{k-1}}{v^{k-1}}\,\frac{b}{a}\geqslant 1+\frac{u^{k-1}-v^{k-1}}{u-v}=$$
$$=1+(u^{k-2}+u^{k-3}v+\ldots+v^{k-2})\geqslant$$
$$\geqslant 1+(2^{k-2}+2^{k-3}+\ldots+1)=2^{k-1}.$$
Заметим, что при $q<0$ утверждение задачи неверно: например, числа 1, -2, 4 образуют и геометрическую, и арифметическую прогрессии.

В. Ф. Лев

М1030. *Для выпуклого многогранника M обозначим через $S(M)$ сумму площадей его граней, через $P(M)$ — сумму произведений длин всех его ребер на соответствующие им внешние углы многогранника (внешний угол при данном ребре — это угол между перпендикулярами к граням, примыкающим к ребру, и направленными во внешнюю область многогранника; он равен π минус величина соответствующего двугранного угла). Докажите, что если многогранник M_1 лежит внутри многогранника M_2,*

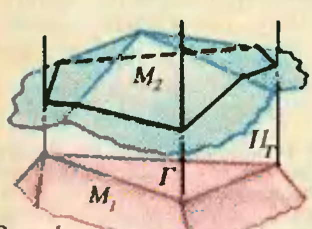


Рис. 1.

а) Для каждой грани Г меньшего многогранника M_1 рассмотрим множество Π_Γ, лежащих вне многогранника M_1, проекции которых на плоскость этой грани попадают на Г (Π_Γ — это бесконечная «прямая призма» с основанием Г, рис. 1). Поскольку многогранник M_1 — выпуклый, эти множества не пересекаются. Площадь той части поверхности многогранника M_2, которая лежит в Π_Γ, не меньше площади грани Г, поскольку площадь многоугольника не меньше площади его ортогональной проекции. Следовательно, $S(M_2)\geqslant S(M_1)$. Выпуклость большего многогранника здесь несущественна.

б) Обозначим через $V(M,r)$ объем *r-окрестности* многогранника M, т. е. множества точек, находящихся на расстоянии не более r от многогранника M. Оно состоит из самого многогранника, прямых призм высоты r, построенных на его гранях как на основаниях, частей цилиндров радиуса r, осями которых являются ребра M, и кусочков шаров радиуса r с центрами в вершинах M (рис. 2). Часть цилиндра при ребре AB — это «сектор», вырезаемый из него двугранным углом с ребром AB. По величине этот угол равен внешнему углу α многогранника при ребре AB, поэтому объем такого «цилиндрического сектора» равен $AB\cdot\alpha\cdot r^2/2$, а сумма всех объемов равна $P(M)r^2/2$. Кусочек шара K_A при вершине A многогранника — это пересечение шара радиуса r с центром A и многогранного угла, который строится так: для каждой из граней многогранника, сходящихся в этой вершине, проводим из точки A перпендикулярный грани луч так, что многогранник и этот луч лежат по разные стороны от плоскости грани (*внеш-*

то
а) $S(M_1) \leqslant S(M_2)$;
б) $P(M_1) \leqslant P(M_2)$.

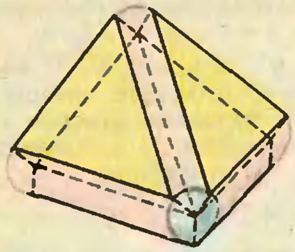


Рис. 2.

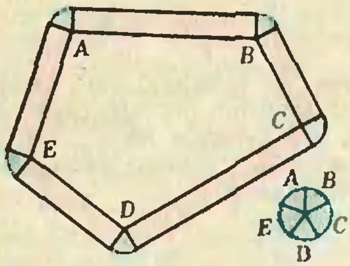


Рис. 3.

нюю нормаль) — эти лучи и задают нужный многогранный угол. Проведем из произвольной точки O лучи, сонаправленные всем внешним нормалям граней многогранника. Тогда плоские углы, образованные парами лучей, соответствующих смежным граням, разобьют пространство на несколько многогранных углов, причем каждый кусочек K_A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AO}$ точно укладывается в один из этих углов. Поэтому все кусочки после переносов образуют целый шар*) и их общий объем равен $4\pi r^3/3$. На рисунке 3 показана r-окрестность многоугольника. При параллельном переносе голубые дольки составляют полный круг — сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π.

Таким образом,

$$V(M,r) = V(M) + S(M)r + \frac{1}{2}P(M)r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3,$$

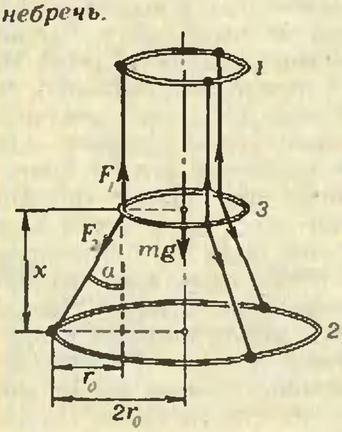
где $V(M)$ — объем многогранника M, и, следовательно, $V(M_2, r) - V(M_1, r)$ — квадратный трехчлен относительно r со старшим коэффициентом $(R(M_2) - P(M_1))/2$. А так как

$$V(M_1, r) \leqslant V(M_2, r)$$

при всех $r \geqslant 0$, этот коэффициент неотрицателен.

А. Б. Гончаров

Ф1038. *Три одинаковые нерастяжимые нити прикреплены на одинаковых расстояниях друг от друга к кольцу радиусом r_0 и аналогичным способом — к кольцу радиусом $2r_0$. Нити пропущены через третье кольцо радиусом r_0 (см. рисунок). Кольцо 1 закреплено в горизонтальной плоскости, и вся система находится в равновесии. Найти расстояние между центрами колец 2 и 3. Все кольца сделаны из одной и той же проволоки. Трением пренебречь.*



Поскольку радиус кольца 2 в два раза больше радиуса кольца 3, его длина в два раза больше длины кольца 3, и так как кольца сделаны из одинаковой проволоки, масса кольца 2 в два раза больше массы кольца 3. Если m — масса кольца 3, то полный вес, удерживаемый нитями, равен $3mg$. Следовательно, сила натяжения каждой нити между кольцами 1 и 3 —

$$F_1 = mg.$$

Так как трение отсутствует, сила натяжения каждой нити одинакова вдоль всей ее длины:

$$F_2 = F_1 = mg$$

(см. рисунок).

Запишем теперь условие равновесия кольца 3:

$$3F_1 - mg - 3F_2 \cos\alpha = 0,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

Расстояние между центрами колец 2 и 3 (см. рисунок)

$$x = r_0 \operatorname{ctg}\alpha = r_0 \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = r_0 \frac{2}{\sqrt{5}},$$

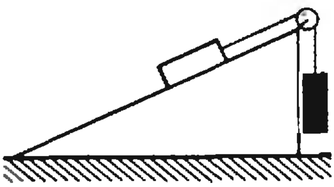
$$x = \frac{2r_0}{\sqrt{5}}.$$

В. П. Бородин

---

*) Определим величину внешнего (телесного) угла многогранника при вершине A как площадь сферической части поверхности кусочка K_A при $r=1$. Из нашего рассуждения следует, что сумма внешних углов выпуклого многогранника равна 4π, т. е. не зависит от многогранника.

Ф1039. *К бруску, лежащему на наклонной плоскости, прикреплена нить, перекинутая через проволочную петлю; на другом конце нити висит грузик (см. рисунок). При этом брусок неподвижен. Когда грузик качнули, брусок начал двигаться. Объясните явление.*



Пусть масса грузика равна m, масса бруска — M, плоскость наклонена под углом α к горизонту, коэффициент трения скольжения равен μ.

В отсутствие качаний вдоль наклонной плоскости действуют сила трения покоя (ее максимальное значение равно $\mu N=\mu Mg\cos\alpha$), сила натяжения нити T и составляющая силы тяжести бруска, равная $Mg\sin\alpha$. Так как брусок неподвижен, то из условия равновесия грузика $T=mg\leqslant Mg(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)$ (трением нити о петлю пренебрегаем).

При отклонении на небольшой угол φ_0 грузик начнет качаться. Для угла $\varphi\leqslant\varphi_0$ можно записать второй закон Ньютона для вращательного движения: $-mv^2/l=mg\cos\varphi-T$. Здесь l — расстояние от небольшого грузика до петли, v — скорость грузика в рассматриваемый момент.

Для малых углов $T\approx mg+mv^2/l$. По мере приближения к положению равновесия, т. е. с ростом скорости, натяжение нити T увеличивается, все время превышая значение mg. Наконец, эта увеличивающаяся сила превышает удерживающие брусок силы, и тогда брусок начинает движение. Это наступает при условии

$$mg+\frac{mv_1^2}{l}>Mg(\mu\cos\alpha+\sin\alpha),$$

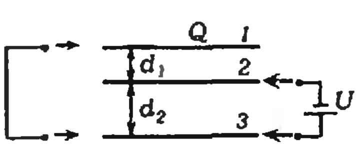
т. е. при $v_1^2>gl(M(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)-m)/m$.

Движение бруска будет продолжаться и после прохождения положения равновесия, когда скорость и, следовательно, сила натяжения начнут уменьшаться. Даже после прохождения значения скорости грузика v_1 брусок еще некоторое время будет продолжать перемещаться по инерции, расходуя накопленную кинетическую энергию на работу против силы трения и «скатывающей силы».

После остановки бруска, когда грузик начнет после максимального отклонения при колебании опускаться, процесс пойдет в обратном направлении. Грузик опять наберет скорость, и нить снова рывком «сдернет» брусок, заставляя его пройти некоторое расстояние, меньшее по сравнению с предыдущим. Постепенно процесс затухнет.

Г. В. Меледин

Ф1040. *Три одинаковые проводящие пластины площадью S каждая расположены параллельно друг другу на расстояниях d_1 и d_2 (см. рисунок). Вначале на пластине 1 находился заряд Q, а пластины 2 и 3 были незаряжены. Затем пластины 2 и 3 присоединяют к батарее с напряжением U, пластины 1 и 3 соединяют проводником. Найти установившиеся заряды на пластинах.*



Пусть установившиеся заряды на пластинах *1*, *2* и *3* равны соответственно q_1, q_2 и q_3.

Будем считать, что поля между пластинами однородны (т. е. пренебрежем искажением поля на краях пластин). Тогда для напряженностей полей, создаваемых каждой пластиной, можно пользоваться выражением для напряженности поля бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E=\frac{q}{2S\varepsilon_0}.$$

После соединения пластин *1* и *3* проводником потенциалы пластин становятся равными. Следовательно,

$$\varphi_1-\varphi_2=\varphi_3-\varphi_2=U$$

(так как разность потенциалов пластин *3* и *2* равна напряжению источника). С другой стороны,

$$\varphi_1-\varphi_2=E_{12}d_1,\quad \varphi_2-\varphi_3=E_{23}d_2,$$

где E_{12}, E_{23} — проекции напряженностей полей между пластинами *1—2* и *2—3* на направление «от *1* к *3*». Согласно принципу суперпозиции

$$E_{12}=\frac{q_1-q_2-q_3}{2S\varepsilon_0},$$

$$E_{23}=\frac{q_1+q_2-q_3}{2S\varepsilon_0}.$$

Таким образом,

$$\frac{q_1-q_2-q_3}{2S\varepsilon_0}d_1=U, \qquad (1)$$

$$\frac{q_1+q_2-q_3}{2S\varepsilon_0}d_2=-U. \qquad (2)$$

Учитывая, что согласно закону сохранения заряда

$$q_1+q_2+q_3=Q, \qquad (3)$$

из уравнений (1)—(3) находим:

$$q_1=\frac{Q}{2}+\frac{S\varepsilon_0U}{d_1},\quad q_3=\frac{Q}{2}+\frac{S\varepsilon_0U}{d_2},$$

$$q_2=-S\varepsilon_0U\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right).$$

В. Н. Иванченко

Ф1041. *Проводящий стержень длиной l и массой m подвешен на двух невесомых жестких стержнях длиной h к горизонтальной оси (см. рисунок). Эта рамка находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого B. Через рамку пропускают импульс тока I_0 малой длительности τ. Определить максимальное отклонение рамки от вертикальной плоскости. Смещение рамки за время τ очень мало.*

При малом смещении рамки за время τ результирующая сила, действующая на стержень, есть

$$F=I_0Bl.$$

За это время стержень приобретает импульс

$$p=mv=F\tau=I_0Bl\tau,$$

и кинетическая энергия стержня становится равной

$$E=\frac{mv^2}{2}=\frac{p^2}{2m}=\frac{I_0^2B^2l^2\tau^2}{2m}.$$

В дальнейшем при отклонении рамки потенциальная энергия стержня увеличивается за счет уменьшения его кинетической энергии. В крайнем положении рамки при максимальном угле отклонения α_{max} потенциальная энергия равна

$$U=mgh\,(1-\cos\alpha_{max})=2mgh\sin^2\frac{\alpha_{max}}{2}.$$

Из закона сохранения энергии —

$$\frac{I_0^2B^2l^2\tau^2}{2m}=2mgh\sin^2\frac{\alpha_{max}}{2}$$

— находим:

$$\sin\frac{\alpha_{max}}{2}=\frac{I_0Bl\tau}{2m\sqrt{gh}}.$$

В. В. Пай

Ф1042. *Оцените, на каком расстоянии железнодорожные рельсы кажутся слившимися. Предполагается, что вы, хорошо представляя физику наблюдаемого явления, можете сами задать числовые значения необходимых величин.*

Для проведения оценки можно поступить следующим образом. Поставьте на листе бумаги две точки очень близко друг к другу — например, на расстоянии $l\approx1{,}5$ мм. Удаляя лист от глаз, оцените расстояние, на котором точки сольются в одну. Если у вас нормальное зрение, это расстояние $d\approx2$ м. Угол $\alpha\sim\frac{l}{d}$ — минимальное угловое расстояние между точками, при котором они различимы глазом как два объекта. Этот угол характеризует ваш глаз.

Рельсы будут казаться вам слившимися, когда угловое расстояние между ними будет α. Если рельсы находятся на расстоянии $L\approx1{,}5$ м один от другого, то они сольются в точку на расстоянии $D\sim\frac{L}{\alpha}\sim\frac{Ld}{l}\approx2$ км.

П. И. Зубков

Задачи

1. Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства (см. рисунок). При этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

2. Говорят, что Тортила отдала золотой ключик Буратино не так просто, как рассказал А. Н. Толстой, а вынесла три коробочки: красную, синюю и зеленую. На красной коробочке было написано «Здесь лежит золотой ключик», на синей — «Зеленая коробочка пуста», а на зеленой — «Здесь сидит гадюка». Тортила прочла надписи и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит золотой ключик, в другой — гадюка, а третья пуста, но все надписи неверны».
Где же лежит золотой ключик?

3. У Коли, Вити и Юры было 12, 14 и 22 ореха. Когда Коля отдал Вите столько орехов, сколько было у Вити, затем Витя отдал Юре столько орехов, сколько было у Юры, а Юра отдал Коле столько орехов, сколько оставалось у Коли, у всех ребят орехов оказалось поровну. Сколько орехов было у каждого?

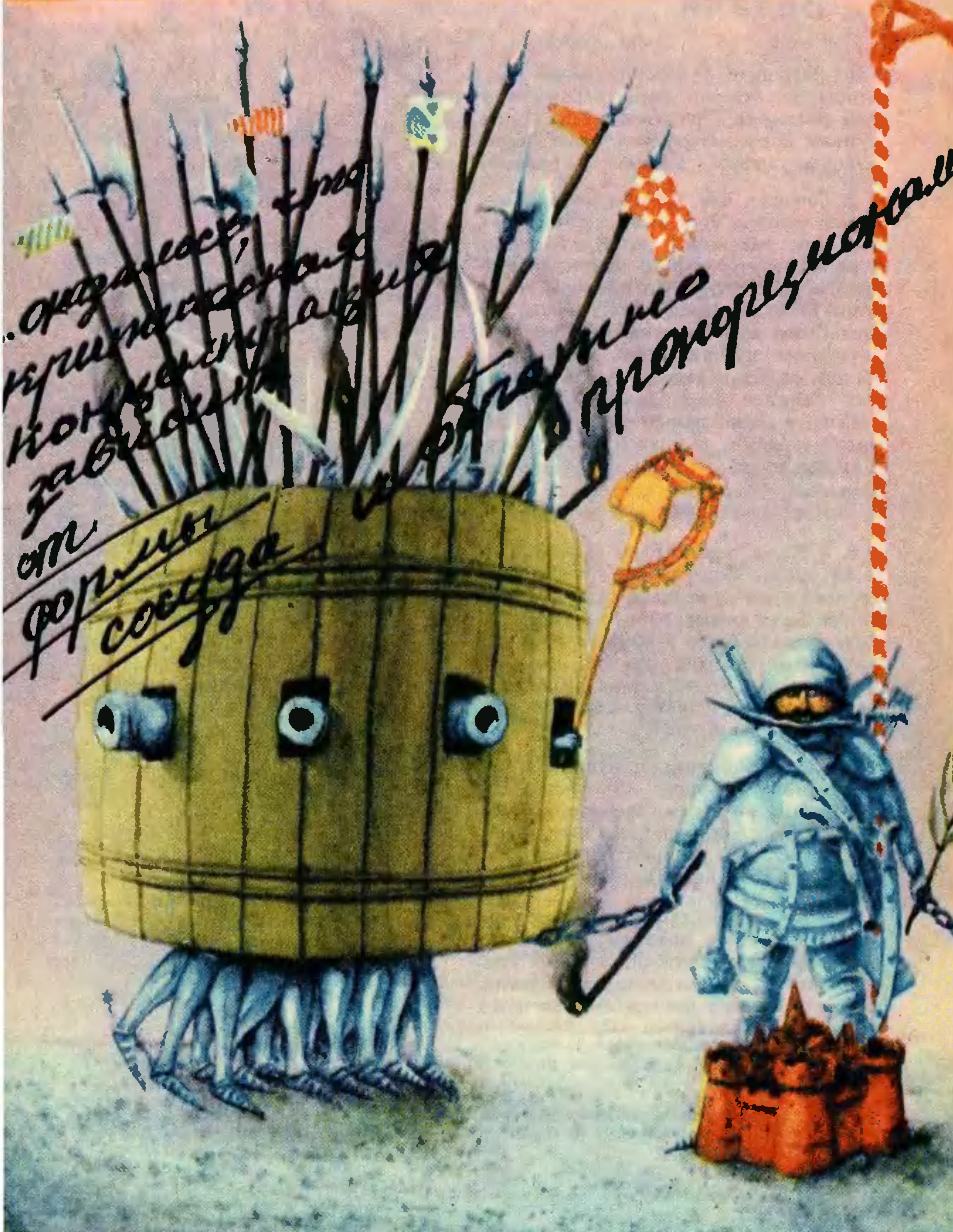
4. Лихие капитаны парусников, перевозивших хлопок из Австралии в Англию, не стремились полностью загружать свои корабли, хотя были заинтересованы в перевозке большего количества хлопка. Почему?

5. Выпуклый четырехугольник разрезали по двум прямым, соединяющим середины противоположных сторон. Покажите, что из полученных четырех кусков всегда можно сложить параллелограмм.

Эти задачи нам предложили: В. Н. Русанов, А. П. Савин, С. В. Дворянинов, Л. П. Мочалов, В. В. Произволов.

И ОДИН В ПОЛЕ ВОИН

Кандидат физико-математических наук Б. С. АШАВСКИЙ



В начале прошлого века Англию взбудоражили известия о катастрофах в угольных шахтах — страшные взрывы уносили жизни тысяч шахтеров. Они происходили из-за воспламенения газа, который шахтеры назвали «рудничным». Понять причину *внезапных взрывов не удавалось* почти столетие. Только в 1916 году немецкий физико-химик Вальтер Нернст высказал предположение, что они происходят в результате реакций, которые можно назвать цепными. И еще почти 50 лет понадобилось для создания теории этого явления.

...Приходилось вам видеть каменные обвалы в горах? Один маленький камешек, случайно сорвавшийся со своего места, увлекает за собой огромные массы других камней, лавиной устремляющихся вниз. Попробуем оценить, сколько камней участвует в таком камнепаде. Пусть первый камень начинает свой путь на высоте 500 м и на каждом метре своего пути вовлекает в движение еще одного соседа. Каждый новый камень в свою очередь становится инициатором движения других, другие — следующих и т. д. Движение как бы передается по цепи. После одного метра пути в потоке будет два камня, после второго метра — четыре, после третьего — восемь и т. д. Когда лавина достигнет подножия горы, в ней уже должно быть 2^{500} камней. Это огромное, более чем 150-значное число! Конечно же, в реальной ситуации количество камней оказывается гораздо меньшим. Не все камни вовлекают в движение соседей, некоторые камни наталкиваются на препятствия на своем пути и останавливаются. Тем не менее число 2^{500} дает некоторое представление о масштабах цепного процесса. По сходной схеме развиваются и некоторые химические реакции.

Одно из самых распространенных веществ в природе — вода. Для образования молекулы воды — молекулы H_2O — должны встретиться три реагирующие частицы — два атома водорода и один атом кислорода. Поэтому для такой реакции водород и кислород надо смешать в количественном соотношении 2:1. Эта смесь называется «гремучим» газом. В 1817 году английский ученый Гемфри Деви обнаружил удивительное явление — в присутствии платины смесь водорода и кислорода реагирует со взрывом. Без платины реакция идет медленно и только при очень высоких температурах.

При взаимодействии водорода с кислородом происходит нечто похожее на явление каменного обвала в горах, только еще быстрее, почти мгновенно. В обычных условиях водород и кислород — это газы с химическими формулами H_2 и O_2, т. е. каждая молекула состоит из двух атомов. Это их естественное и устойчивое состояние. Чтобы разорвать молекулу H_2 на два атома, надо затратить определенную энергию. Присутствие платины в газовой смеси облегчает разрыв молекулы H_2 на атомы — на ее поверхности реакция $H_2 \rightarrow 2H$ происходит относительно легко.

Образующийся на поверхности платины атом водорода крайне неустойчив, он стремится поскорее избавиться от своего вынужденного одиночества. Время его «холостой» жизни очень мало. Не зря в природе атомы водорода, кислорода и многих других веществ объединяются в неразлучные пары — молекулы. Активный атом водорода вызывает цепь дальнейших превращений, как один маленький камешек вызывает целый обвал в горах. При его взаимодействии с молекулой O_2 происходит реакция $H+O_2=OH+O$ — образуются сразу две активные частицы: «одинокий» атом кислорода и частица OH (ведь в ней до молекулы воды не хватает одного атома водорода, к которому она стремится быстрее присоединиться). Активные частицы — O и OH — далее взаимодействуют с молекулами водорода

$$OH+H_2=H_2O+H,$$
$$O+H_2=OH+H \text{ и т. д.}$$

В этих реакциях образуются не только устойчивые молекулы H_2O, но и новые активные частицы, которые снова взаимодействуют с молекулами водорода и кислорода с образованием новых молекул воды и новых активных частиц. Все элементарные реакции не независимы друг от друга, а представляют собой цепь взаимосвязанных событий. В каждой элементарной реакции образуется не только продукт реакции, но и закладывается основа для дальнейших взаимодействий — появляются новые активные частицы. (Вспомним, как при камнепаде в горах каждый новый камень вовлекает в движение своих соседей.) Платина только помогает начать цепь превращений (разложение молекулы H_2). Дальше реакция может идти и без ее участия.

Не всегда, видно, верна пословица: «Один в поле не воин». В цепной реакции один «воинственный» атом может повести за собой десятки миллионов своих соратников.

Именно цепные реакции приводили к взрывам в каменноугольных копях Англии. Образующийся «рудничный» газ мгновенно воспламенялся при зажигании ламп, освещающих шахты. Огонь в лампе помогал началу цепной реакции в «рудничном» газе (как платина в «гремучем» газе). За изобретение безопасной лампы для работы в шахтах была объявлена специальная награда. Через год Гемфри Деви и его молодому сотруднику Майклу Фарадею — будущему первооткрывателю явления электромагнитной индукции — удалось сконструировать безопасную лампу, в которой опасный газ по трубочкам отводился из области пламени. Сделали они это, ничего не зная о цепных реакциях.

Естественно, возникают вопросы: при каких условиях может начаться цепная реакция? существует ли сила, способная остановить или хотя бы замедлить такую лавину?

Эти вопросы изучались советскими учеными — академиком Н. Н. Семеновым и его сотрудниками. В частности, увеличивая концентрацию молекул (т. е. их количество в единице объема), они обнаружили, что цепной процесс начинается при вполне определенной — критической — концентрации. Ниже этой концентрации реакция не идет, а выше — носит лавинообразный характер. Как будто неведомый полководец отдает приказ о наступлении — и десятки миллионов частиц мгновенно идут в бой.

Более того, оказалось, что критическая концентрация зависит от формы сосуда и обратно пропорциональна площади его стенок. Вот как пишет об этом сам Н. Н. Семенов: «Отсюда был лишь один шаг до предположения, что активные частицы — скажем атомы кислорода,— доходя до стенок, захватываются ими, выбывают из игры и не могут далее вызвать реакцию. Два таких атома, встречаясь на стенке, образуют вновь неактивную молекулу кислорода, которая легко слетает в объем, очищая стенку. На пути цепи — от места ее зарождения внутри сосуда до стенок — происходит то или иное число реакций, возникает столько-то частиц. Чем уже сосуд, тем короче эта цепь, тем меньше в ней элементарных реакций, тем меньше успеет возникнуть разветвлений».

С увеличением концентрации увеличивается число активных частиц. С увеличением площади стенок сосуда их количество уменьшается, так как становится больше захваченных стенками сосуда и выбывших из игры частиц. Если постепенно заполнять сосуд реагирующими газами, то до определенной концентрации цепная реакция идти не может — на стенках оседает и успокаивается больше активных частиц, чем их образуется в объеме сосуда. Продолжая дальше заполнять сосуд газами (другими словами, увеличивая концентрацию), мы дойдем до такой критической концентрации, при которой активных частиц образуется больше, чем их гибнет на стенках. Поверхность сосуда уже не в силах справиться с такой лавиной активных частиц. Их становится слишком много. В этот момент происходит переход от инертного состояния до бурной реакции. Критическая концентрация — это граница, отделяющая зону «спокойствия» реакции от зоны «взрывной» активности. Она зависит не только от того, какие газы реагируют, но и от того, в каком сосуде эти газы находятся. Не один полководец управляет цепной реакцией, а сразу два. Первый — концентрация — зовет атомы в бой, второй — поверхность сосуда — пытается их остановить. Судья им критическая концентрация. Ниже нее — сильнее второй, выше — побеждает первый.

Если мы, поддерживая ту же концентрацию, будем уменьшать сосуд, то дойдем до такого размера, когда бо́льшая часть цепей вообще не успеет разветвиться. Тогда число погибших на стенке активных атомов окажется больше, чем число вновь образующихся в результате реакции. Лавина развиваться уже не сможет, и реакция практически прекратится.

Стенки сосуда — не единственная сила, способная успокоить активные частицы. Это могут сделать и чужие молекулы примесей, сталкиваясь с которыми частицы теряют свою активность. Ничтожные количества примесей могут очень сильно влиять на скорость цепных процессов.

Результаты опытов были неожиданными, и многие ученые им просто не поверили. Например, знаменитый немецкий химик Макс Боденштейн объяснил полученные результаты ошибкой эксперимента. Недоверчиво встретили результаты опытов Семенова даже его близкие коллеги. «Мне пришлось пережить немало неприятных часов»,— вспоминает ученый.

Это сегодня академик Н. Н. Семенов — основоположник новой науки — химической физики, автор классического труда «Цепные реакции», настольной книги многих физиков и химиков. А тогда, более 50 лет назад, ему потребовалось немало мужества, чтобы в сложной ситуации не потерять уверенности в правоте своих идей.

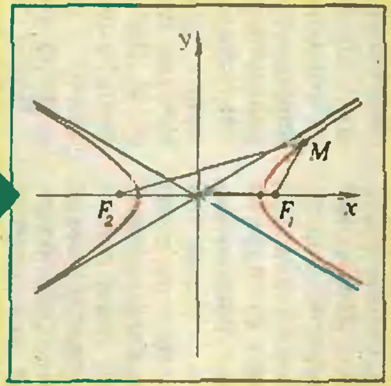
Цепные реакции лежат в основе многих важнейших промышленных технологий. Это и горение, и получение горючих материалов из нефти, и производство пластмасс. Даже взрыв атомной бомбы — это цепная реакция, только активными частицами в этом случае оказываются не атомы, а нейтроны. Когда ученики Семенова академики Ю. Б. Харитон и Я. Б. Зельдович создали в 1939 году теорию цепного распада урана, им во многом помогли представления о цепных реакциях.

Более 20 лет понадобилось миру, чтобы до конца осознать значение разветвленных цепных реакций. В 1956 году академик Н. Н. Семенов первым из советских ученых был удостоен Нобелевской премии за исследования механизмов химических реакций. В своей речи при ее получении он сказал: «Дальнейшей задачей химии является создание возможностей рационального управления скоростью и направлением химического превращения. Теория цепных реакций намечает первоначальные пути подхода к этому вопросу».

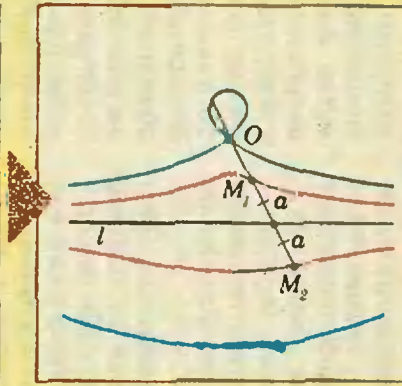
Калейдоскоп „Кванта"

Замечательные линии и точки

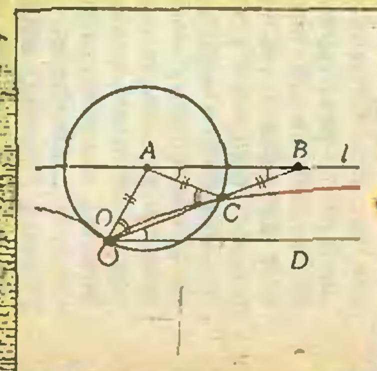
Гипербола была известна еще древнегреческим математикам. Она определяется как множество точек, разность расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 постоянна. Эти точки называются *фокусами гиперболы*.



Менее известна другая кривая — *конхоида*. Она определяется так: на плоскости фиксируются прямая l и точка O и задается число a. Через точку O проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки пересечения с прямой l в обе стороны откладываются отрезки длины a. Вторые концы этих отрезков и образуют конхоиду.

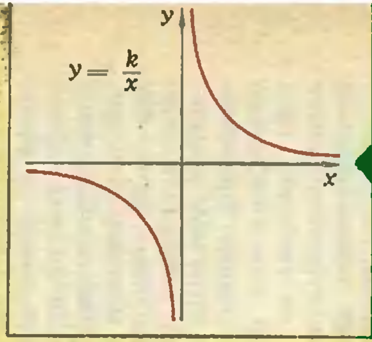


Представьте себе два круглых острова в океане и лодку, плывущую вдоль морской границы между этими островами, т. е. находящуюся во всякий момент на одинаковом расстоянии от берегов этих островов. Если размеры островов одинаковы, то путь лодки будет прямолинеен, а если нет, то лодка будет плыть по гиперболе.

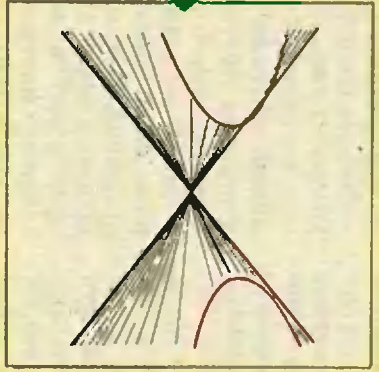


Древнегреческий математик Никомед (3 век до н. э.) решал задачу *трисекции угла* с помощью конхоиды. Проведем через точку A прямую l, параллельную прямой OD, окружность с центром в точке A и радиусом $a = AO$. Конхоида, построенная по прямой l, точке O и числу a, будет пересекаться с окружностью в точке C. Угол COD равен $1/3$ угла AOD.

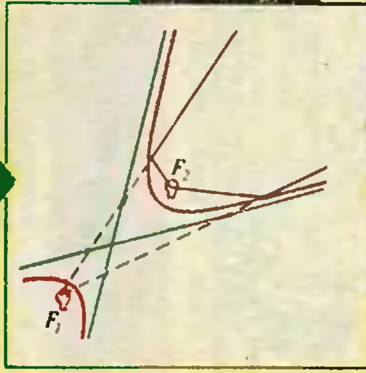
Гипербола — одно из конических сечений: ее можно получить, пересекая коническую поверхность плоскостью, не проходящей через ее вершину и пересекающей обе ее половинки. Другими коническими сечениями являются *парабола* и *эллипс*.



Гиперболой является график обратной пропорциональной зависимости: $y=k/x$. При удалении точек графика к бесконечности они прижимаются к одной из осей координат x или y. Эти прямые называются ее асимптотами. Асимптоты есть у любой гиперболы.



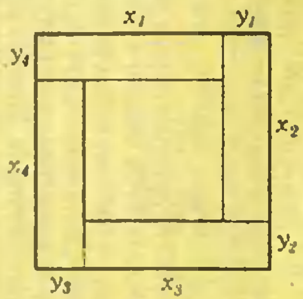
Если поместить в один из фокусов гиперболического зеркала источник света, то, отразившись в зеркале, свет будет продолжать двигаться так, как будто он исходит из второго фокуса гиперболы. Это оптическое свойство гиперболы. Его использовал Гарин в романе А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина».



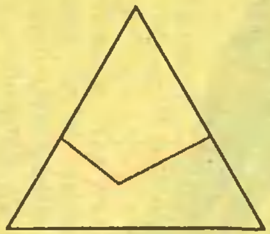
Конхоидой интересовался французский математик и философ Рене Декарт. На ней он демонстрировал, в частности, свой метод проведения касательных к кривым. В декартовых координатах уравнение гиперболы имеет вид $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, а конхоиды $(x^2+y^2)(y-h)^2=a^2y^2$ (h — расстояние от точки O до прямой l).

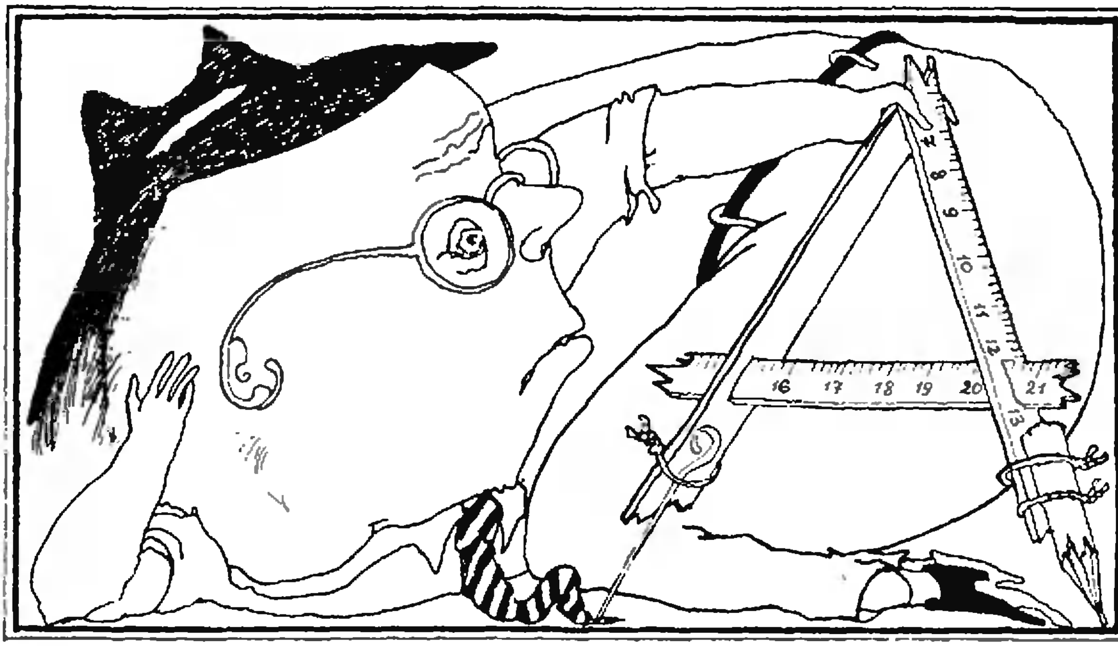
Головоломки

1. Квадрат разбит на пять прямоугольников так, как изображено на рисунке. Известно, что площади прямоугольников, примыкающих к границе квадрата, равны. Покажите, что центральный прямоугольник — это квадрат.



2. Какую наименьшую длину может иметь кривая, делящая площадь правильного треугольника со стороной a на две равные части?





Математический кружок

Построения одним циркулем

Кандидат физико-математических наук
Д. Б. ФУКС

Среди бесчисленных задач на построение встречаются такие, в которых построение требуется произвести одной линейкой или одним циркулем. Однако давно известно, что отсутствие линейки не сужает круга возможных построений: *всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать одним циркулем.*

Идея о построении с помощью одного циркуля была выдвинута еще итальянским ученым Джованни Баттиста Бенедетти (1530—1590). В 1672 году появилась книга «Euclidus Danicus» датского геометра Георга Мора (1640—1697). В ней он показал, что все задачи, которые сводятся к квадратным уравнениям, можно решить геометрически с помощью одного циркуля. Более чем через 100 лет, в 1797 году, эта задача была вновь поставлена и решена итальянцем Лоренцо Маскерони (1750—1800). Соответствующее утверждение называют теперь *теоремой Мора — Маскерони.* В этой заметке мы приведем доказательство этой теоремы.

Во всех решаемых ниже задачах на построение мы ограничиваемся описанием самого построения, предоставляя читателю самостоятельно доказать, что построение приводит к желаемой цели. Впрочем, доказательства приведены в разделе «Ответы, указания, решения» на с. 58.

1. Формулировка результата. Разумеется, нельзя провести циркулем прямую, поэтому все рассматриваемые задачи на построение должны состоять в построении некоторой точки (на плоскости).

Теорема. *Предположим, что точка M может быть построена по точкам A_1, ..., A_n при помощи циркуля и линейки. Тогда точка M может быть построена по точкам A_1, ..., A_n при помощи одного циркуля.*

Чтобы доказать эту теорему, посмотрим, какие построения производятся линейкой. С помощью линейки можно провести через две данные точки прямую и найти ее точки пересечения с ранее построенными прямыми и окружностями. Но так как с самого начала нам были даны только точки, всякая ранее построенная прямая была некогда проведена через две еще ранее построенные точки, и всякая ранее построенная окружность имеет своим центром ранее построенную точку. Таким образом, в процессе построения линейка применяется только к решению одной из двух следующих задач.

Задача 1. *По данным точкам A, B, C, D найти точку пересечения прямых AB и CD.*

Задача 2. *По данной окружности S с данным центром O и данным точкам A и B найти точки пересечения окружности S с прямой AB.*

Наша теорема будет доказана, если мы установим, что обе эти задачи могут быть решены при помощи одного циркуля.

2. Вспомогательные построения. В этом и следующем пунктах, говоря «построение», мы подразумеваем построение одним циркулем. Мы начнем с решения четырех вспомогательных задач.

Задача 3. *Даны (различные) точки A и B. Построить на луче AB точку C такую, что $AC=2AB$.*

Построение (рис. 1). Проведем через точку A окружность с центром B. На этой окружности трижды отложим отрезок AB, начиная от точки A. Получившаяся при третьем откладывании точка C удовлетворяет требованиям задачи.

Задача 4. *Дана окружность с центром O и дуга AB на ней. Построить точку, делящую эту дугу пополам.*

Построение (рис. 2). Через точку O проведем окружности с центрами A и B. Проведем окружность с центром O радиусом AB. Возьмем две точки: P и Q пересечения этой окружности с двумя построенными; тогда дуги OP и OQ равны дуге AB. Затем через точки B и A проведем окружности с центрами P и Q до их пересечения в точке R. Наконец, радиусом OR проведем окружность с центром P или Q. Точка C пересечения этой окружности с дугой AB и будет искомой.

Задача 5. *Дана окружность S с центром O и точка $P \neq O$. На луче OP построить точку P' такую, что $OP \cdot OP'=r^2$, где r — радиус окружности S.*

(Такая точка P' называется симметричной точке P относительно окружности S.)

Построение. Случай 1. Точка P лежит вне окружности S (рис. 3). Проведем через точку O окружность с центром P. Пусть Q и R — точки ее пересечения с окружностью S. Проведем через точку O окружности с центрами Q и R. Отличная от O точка пересечения этих окружностей и есть искомая точка P'.

(Это построение проходит и в случае, когда точка P лежит внутри окружности S, но находится от ее центра O на расстоянии, большем $r/2$.)

Случай 2. Точка P лежит внутри окружности S. Пользуясь построением задачи 3, мы последовательно строим на луче OP точки P_2, P_3, ... такие, что $OP_2=2OP$, $OP_3=3OP$, ..., пока не дойдем до точки P_n, которая будет лежать вне S. Для точки P_n мы строим симметричную относительно окружности S точку P'_1, пользуясь предыдущим построением. Наконец, на луче OP'_1 (т. е. на луче OP) мы строим точки P'_2, P'_3, ... такие, что $OP'_2=2OP'_1$, $OP'_3=3OP'_1$, ... Точка P'_n и будет искомой.

Задача 6. *Даны окружность S с центром O и несовпадающие точки A, B. Построить окружность, проходящую через точку O и точки пересечения прямой AB с окружностью S (в предположении, что прямая AB не проходит через центр окружности S и пересекает ее в двух точках). Доказать, что эта окружность, за вычетом точки O, представляет собой геометрическое место точек, симметрич-*

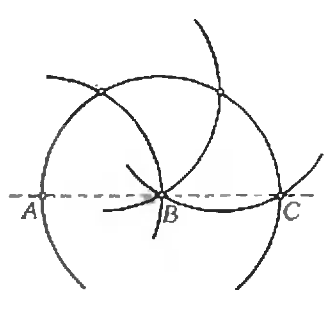


Рис. 1.

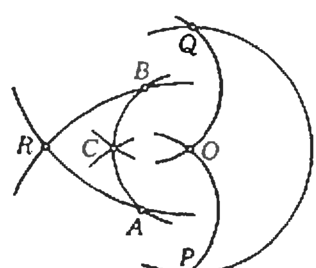


Рис. 2.

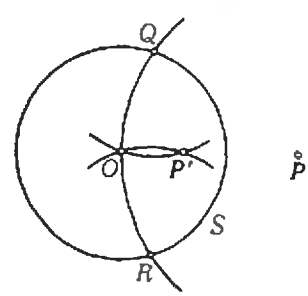


Рис. 3.

ных точкам прямой AB относительно окружности S.

Построение (рис. 4). Проведем через точку O окружности с центрами A и B. Точку их пересечения, отличную от O, обозначим через P. Построим точку P', симметричную точке P относительно окружности S (задача 5), и построим окружность с центром P', проходящую через O. Это и есть искомая окружность.

3. Основные построения. Построение к задаче 2. Если точка O не лежит на прямой AB, проходит построение задачи 6 и даже его упрощенный вариант: мы строим точку P, как в задаче 6, и затем проводим окружность с центром P радиусом, равным радиусу окружности S (зная центр окружности S, мы можем радиус окружности измерить циркулем); точки пересечения построенной окружности с данной окружностью — искомые точки. Если точка O лежит на прямой AB, то это построение не пройдет: точка P сольется с точкой O. Тогда мы применяем другое построение (рис. 5): с центром A (или с центром B, если $A=O$) проводим произвольную окружность, пересекающую окружность S в двух точках, обозначаем точки пересечения через C и D и делим дуги CD и DC окружности S пополам (задача 4). Точки деления и будут искомыми.

Построение к задаче 1 (рис. 6). Построим произвольную окружность S, внутри которой содержатся все данные точки и центр O которой не лежит ни на одной из прямых AB и CD. (Это легко сделать «на глазок», но для «строгого построения» такой рецепт не годится. Можно поступить так: построить произвольную окружность, найти, пользуясь построением задачи 2, точки ее пересечения с прямыми AB и CD и взять в качестве O точку построенной окружности, отличную от найденных точек.) Затем, пользуясь построением задачи 6, строим окружность S_1, проходящую через O и через точки пересечения окружности S с прямой AB, и окружность S_2, проходящую через O и через точки пересечения окружности S с прямой CD. Затем мы обозначаем через P точку пересечения окружностей S_1 и S_2, отличную от O, и строим точку P', симметричную точке P относительно окружности S. Это и есть искомая точка.

4. Заключительные замечания. 1°. Если данные задачи на построение включают в себя не только точки, линейка может оказаться для ее решения необходимой. Например: даны кривая c и точки A, B; найти точки пересечения кривой c с прямой AB. Это, вообще говоря, нельзя сделать без линейки. Однако бывает, что подобные задачи сводятся к задачам рассмотренного типа и решаются одним циркулем. Например: на плоскости нарисована окружность; пользуясь одним циркулем, найти ее центр. Это можно сделать так: отметим на окружности три точки A, B, C; как известно, циркулем и линейкой можно построить центр окружности, описанной около треугольника ABC; значит, это можно сделать и одним циркулем. (Впрочем, задача имеет гораздо более простое решение — найдите его!) Мы видим, кстати, что в задачах 2, 4, 5 и 6 не обязательно было указывать центр заданной окружности.

2°. Одной линейкой можно проделать не всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой. (Доказательство см. в книге: Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры. — М.: Наука, 1966.) Существует, однако, поразительная теорема Штейнера, согласно которой все построения, выполнимые циркулем и линейкой, могут быть проделаны одной линейкой, если на листе предварительно нарисована окружность и отмечен ее центр.

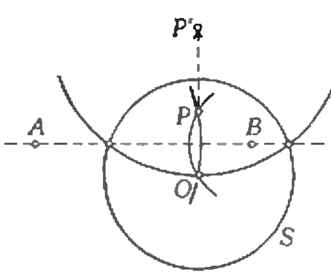


Рис. 4.

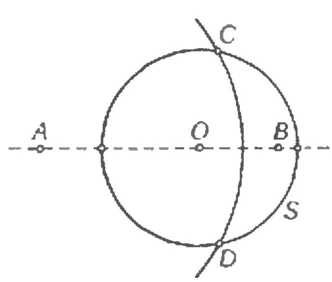


Рис. 5.

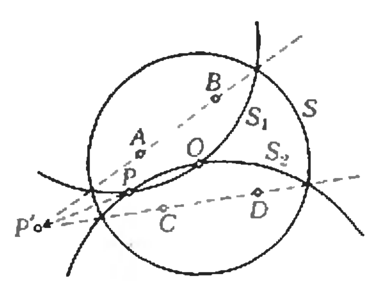


Рис. 6.

Значит, если вы собирались делать построения циркулем и линейкой и забыли дома линейку, не беда — можно обойтись одним циркулем; если же вы забыли циркуль — попросите его у товарища и нарисуйте им одну окружность, предварительно пометив ее центр; после этого вы можете построить что угодно одной линейкой. (Хуже, конечно, если вы забыли дома и циркуль, и линейку — здесь уж наука бессильна вам помочь.)

Размышляя об одной олимпиадной задаче

В. Я. САННИНСКИЙ

Олимпиадные задачи полезны не только для проверки математических способностей в жестких условиях соревнования. В более спокойной обстановке, когда есть время на размышление, конкурсная задача может стать источником небольшого самостоятельного исследования, чем-то напоминающего серьезное математическое творчество.

Я покажу это на примере следующей задачи на доказательство, встречающейся во многих конкурсных сборниках:

Если все простые числа, начиная с 5, занумерованы в порядке возрастания, то каждое занумерованное простое число будет больше своего утроенного номера.

Попробуйте доказать это самостоятельно. Это не очень трудно, я, например, придумал доказательство довольно быстро*). Однако после этого я не бросил задачу, а стал размышлять над ее формулировкой. И сразу возник вопрос: при чем здесь числа 5 и 3, нельзя ли взять другие числа? Это подсказывает о б о б щ е н и е задачи — вместо пары чисел (3, 5) рассмотреть произвольную пару (k, p), где k — натуральное, а p — простое. Получилось утверждение, которое я назвал

$У(k, p)$: если все простые числа, начиная с p, занумеровать в порядке возрастания, то каждое занумерованное простое число больше чем его номер, умноженный на k.

Одна беда. Это утверждение не всегда верно (не для всех k и p). Например, $У$ (3,3) — ложно (простое число 13 меньше, чем его утроенный номер: $13 < 3 \times 5 = 15$). С другой стороны, мы знаем, что $У(3, 5)$ — верно (это утверждение нашей исходной задачи). Ну а тогда возникает задача описания всех *хороших* пар (k, p), то есть таких пар, для которых $У(k, p)$ верно.

Чтобы решить ее, я начал пробовать различные небольшие пары, и быстро нашел несколько нехороших (например (4, 5), (6, 3)) и несколько хороших пар ((1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 7)). Советую читателю прервать чтение на этом месте и тоже попробовать несколько конкретных небольших пар.

Даже если читатель не последовал моему совету, он легко поймет, что из справедливости $У(k, p)$ вытекает справедливость $U(k', p')$, если $k' \leqslant k$ и $p' \geqslant p$. Я тоже это быстро заметил и поэтому решил не искать все хорошие пары, а искать только *неулучшаемые* пары (k, p), то есть такие, для которых верно $У(k, p)$, но ложно $У(k', p)$ при $k' > k$ и ложно $У(k, p')$ при $p' < p$. Так возникла новая з а д а ч а: *найти все неулучшаемые пары.*

У п р а ж н е н и е 1. *Докажите, что пары* (1, 2), (2, 3) *и* (3, 5) *неулучшаемы.*

Я это доказал, как наверно и читатель, без особого труда и взялся за следующую пару — (4, 7). Она оказалась не хорошей: $7 > 4 \cdot 1$, $11 > 4 \cdot 2$, $13 > 4 \cdot 3$, $17 > 4 \cdot 4$, но неверно, что $19 > 4 \cdot 5$. Я перешел к следующей паре — (4, 11) — и начал пробовать $11 > 4 \cdot 1$, $13 > 4 \cdot 2, \ldots, 29 > 4 \cdot 6$, $31 > 4 \cdot 7, \ldots$ Вскоре мне это надоело, и я решил, что у меня есть правдоподобная г и п о т е з а: пара (4, 11) неулучшаема. Признаюсь, мне пришлось немало повозиться, прежде чем я сумел установить справедливость этой гипотезы.

*) Я воспользовался тем, что среди девяти последовательных чисел $9n$, $9n+1$, ... $9n+8$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, может встретиться не более трех простых.

Рассуждал я так. Пусть $p_1=11$, $p_2=13$, ..., p_n, ... интересующая нас нумерация. Чтобы доказать $У(4, 11)$, нужно установить неравенство $p_n>4n$ для всех $n\in\mathbf{N}$. Возьмем число $m=210=2\cdot3\cdot5\cdot7$ (произведения всех простых чисел, меньших 11) и разобьем множество натуральных чисел $n\geqslant11$ на m классов, в зависимости от остатка при их делении на m. Именно, к r-ому классу K_r, $r=0, 1, ..., m-1$ отнесем все числа вида $n=tm+r$, где $t\in\mathbf{N}$. Тогда каждое натуральное число n попадает ровно в один класс K_r — именно, в класс с номером r, равным остатку от деления n на $m=210$. Выбросим из списка $K_0, K_1, ...$ $..., K_{m-1}=K_{209}$ все классы, номера которых — составные числа. Другими словами, оставим в списке лишь те классы, номера которых взаимно просты с m. Заметим, что все рассматриваемые простые числа $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ находятся в оставшихся классах (почему?). Обозначим номера оставшихся классов через $a_1, a_2, a_3, ...$, например, $a_1=11$, $a_2=13, ..., a_{47}=209$.

Упражнение 2. Найдите все номера (их $\varphi(m)=\varphi(210)=48$) оставшихся классов и проверьте, что для них выполняется неравенство $a_n>4n$, где $n=1, 2, ..., 48$.*)

Занумеруем теперь в порядке возрастания все числа, находящиеся в оставшихся классах. Этот список начнется с уже известных нам чисел $a_1, a_2, a_3, ...$, но не оборвется на $a_{48}=211$, а пойдет дальше: $a_{49}=217$, $a_{50}=221, ...$. Тогда очевидно, что $a_n\leqslant p_n$ для всех $n=1, 2, ...$ (ведь наши простые числа $p_1, p_2, ...$ находятся среди оставшихся чисел $a_1, a_2, ...$). Поэтому нам достаточно доказать неравенство $a_n>4n$ (для всех n). Для первых 48 чисел $a_1, ..., a_{48}$ оно уже проверено (упражнение 2), для дальнейших n мы его докажем по индукции. Индукцию будет вести по вспомогательному параметру t при фиксированном r ($r=1, 2, ..., 48$), то есть проведем доказательство для всех чисел из класса с номером a_r. Любое число a_s из этого класса представляется в виде $a_s=t\cdot210+r$. Начало индукции уже есть (мы проверили, что при $t=0$ число a_r удовлетворяет неравенству $a_r>4r$). Пусть (индукционное предположение), $a_s=210\cdot t+r>4s$. Нам нужно установить неравенство $210(t+1)+r>4(s+48)$, ибо $s+48$ — номер следующего числа $210(t+1)+r$ из рассматриваемого класса (с номером a_r). Но оно сразу следует из индукционного предположения и очевидного неравенства $210>4\cdot48$. Утверждение $У(4, 11)$ доказано.

Упражнение 3. Проверьте, что при $k>5$ утверждение $У(k, 11)$ неверно.

Так как $У(4, 7)$ неверно тоже, мы установили, что пара (4, 11) действительно неулучшаема.

Попробуем продвинуться дальше — будем искать неулучшаемую пару вида $(5, p)$.

Упражнение 4. Проверьте, что пары $(5, p)$ не являются хорошими при $p<23$, также как и пара (6, 23).

Исследование пары (5, 23) ($23>5\cdot1$, $29>5\cdot2$, $31>5\cdot3$ и т. д.) приводит к очередной гипотезе: *пара (5, 23) неулучшаема.*

Справедливость этой гипотезы можно установить, рассуждая так же, как для пары (4, 11). То есть взять $m=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19=$ $=9699690$, рассмотреть классы вычетов по модулю m, из них выделить $\varphi(m)=1658880$ классов, взаимно простых с m, занумеровать все числа (начиная с 23) из выделенных классов в порядке возрастания ($a_1, a_2, ...$) и доказать по индукции, что неравенство $a_n>5n$ (из которого следует $p_n>5n$ для выбранной нумерации простых чисел $p_1=23$, $p_2=29, ...$) верно для любого числа a_n из данного класса, если оно верно для номера a_n этого класса. Тогда остается «только» проверить, что неравенство $a_n>5n$ выполняется для всех n от 1 до $\varphi(m)=$ $=1658880$. Конечно, эта проверка непосильна для человека. Пришлось ее поручить машине; ЭВМ ЕС — 1045 за 6 минут дала ответ: действительно, $a_n>5n$ при $n=1, 2, ..., \varphi(m)$. Гипотеза о неулучшаемости пары (5, 23) установлена.

В современной математике такое встречается часто: логическими рассуждениями математик сводит задачу проверки бесконечного набора утверждений (у нас — неравенств) к конечному (но большому) набору, а уже утверждения этого набора проверяет ЭВМ.

Каковы дальнейшие перспективы? Поиск следующей неулучшаемой пары (вида $(6, p)$) приводит к числам, на пределе возможности ЭВМ ЕС — 1045, а пары вида $(7, p)$ — заведомо не поддаются нашему подходу. Поэтому я пробовал иначе обобщить исходную задачу и пришел к следующей формулировке:

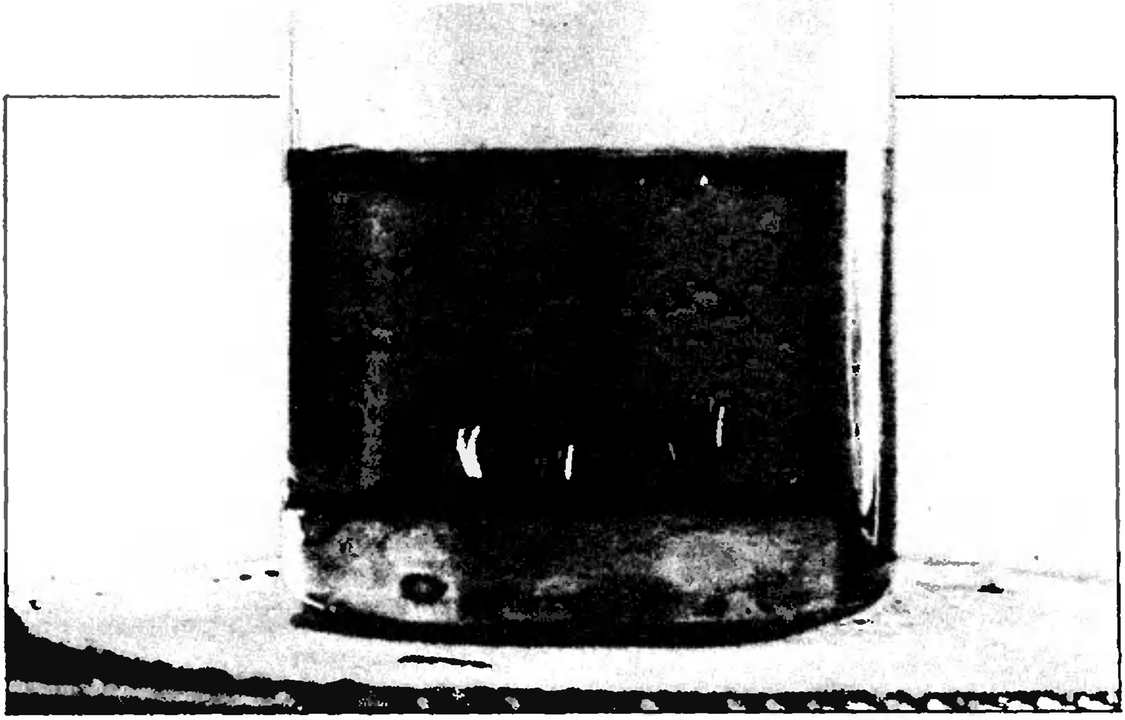
Теорема. *Простые числа растут быстрее любой линейной функции от их номера; иначе говоря, если $p_1=2$, $p_2=3, ..., p_n, ...$ последовательность всех простых чисел в порядке возрастания, то для любых k и b неравенство*

$$p_n>kn+b$$

выполняется для всех n, больших некоторого n_0 (зависящего от k и b).

Попробуйте и вы доказать эту известную теорему. Стоит ли двигаться дальше? Например, можно было бы попробовать доказать, что *простые числа растут медленнее, чем многочлен второй степени от их номера.* Но это уже трудная задача: мы приближаемся к переднему краю науки, и двигаться дальше можно только изучив труды наших великих предшественников — Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Римана, Чебышева.

*) Классы $K_0, K_1, ..., K_{m-1}$ называются *классами вычетов по модулю m*. Число этих классов с номерами взаимно простыми с m обозначается $\varphi(m)$; функция φ называется *функцией Эйлера*.



Лаборатория „Кванта"

Кипение жидкостей

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат химических наук
В. В. СОРОКИН

Процесс кипения жидкостей всем нам хорошо знаком. Мы говорим, что вода в чайнике кипит, когда интенсивное образование пара происходит по всему объему жидкости. В этом заключается отличие кипения от испарения, при котором процесс парообразования идет лишь с открытой поверхности.

Кипение начинается тогда, когда давление насыщенного пара в пузырьках становится равным внешнему атмосферному давлению.*) Если же давление насыщенного пара меньше атмосферного, случайно образовавшийся в жидкости пузырек пара должен схлопнуться и исчезнуть.

Пограничное кипение жидкостей

Хорошо известно, что каждая жидкость характеризуется вполне определенной температурой кипения при определенном атмосферном давлении. Например, вода при нормальном атмосферном давлении ($p_0=760$ мм рт. ст.) кипит при 100 °С, а толуол (C_7H_8) — при 111 °С.

А при какой температуре будет кипеть «смесь» толуола и воды, двух не смешивающихся друг с другом жидкостей? Казалось бы, температура кипения должна лежать между 100 °С и 111 °С. Однако, если в пробирку с водой осторожно налить немного толуола (он окажется над водой, так как его плотность меньше, чем плотность воды) и нагревать ее в водяной бане, то окажется, что кипение начинается примерно при 95 °С! Отметим, что при проведении этого опыта необходимо пользоваться довольно точным термометром.

В чем же дело? Ответ подсказывает эксперимент. При внимательном наблюдении видно, что кипение начинается на границе раздела жидкостей — толуола и воды, и мы имеем дело с так называемым пограничным кипением жидкостей. В этом случае в образующийся на границе газовый

*) На самом деле для роста образовавшихся пузырьков необходимо, чтобы давление пара в них несколько превышало сумму атмосферного давления, давления столба вышележащей жидкости и давления, обусловленного поверхностным натяжением жидкости. Однако в большинстве случаев два последних давления много меньше атмосферного, и их можно не учитывать.

пузырек испаряется как вода, так и толуол, и пузырек содержит насыщенные пары воды и толуола. При кипении полное давление паров в пузырьке, равное атмосферному давлению p_0, представляет собой, согласно закону Дальтона, сумму парциальных давлений насыщенных паров толуола $p_т(T_к)$ и воды $p_в(T_к)$: $p_0 = p_т(T_к) + p_в(T_к)$. Таким образом, давление насыщенного пара воды и толуола, каждого в отдельности, меньше атмосферного, а значит, и температура пограничного кипения $T_к$ должна быть меньше температуры кипения как воды, так и толуола.

Особенно удачным получается аналогичный демонстрационный опыт, если в пробирку налить немного четыреххлористого углерода (CCl_4), который кипит при 76,7 °С, а поверх него налить воду. С тем чтобы граница раздела жидкостей была заметнее, четыреххлористый углерод можно предварительно подкрасить раствором йода (рис. 1). Нагревание пробирки в водяной бане показывает, что пограничное кипение начинается при температуре всего 65 °С. При проведении опыта обратите внимание на постепенность нагревания, чтобы не вызвать объемного кипения жидкостей.

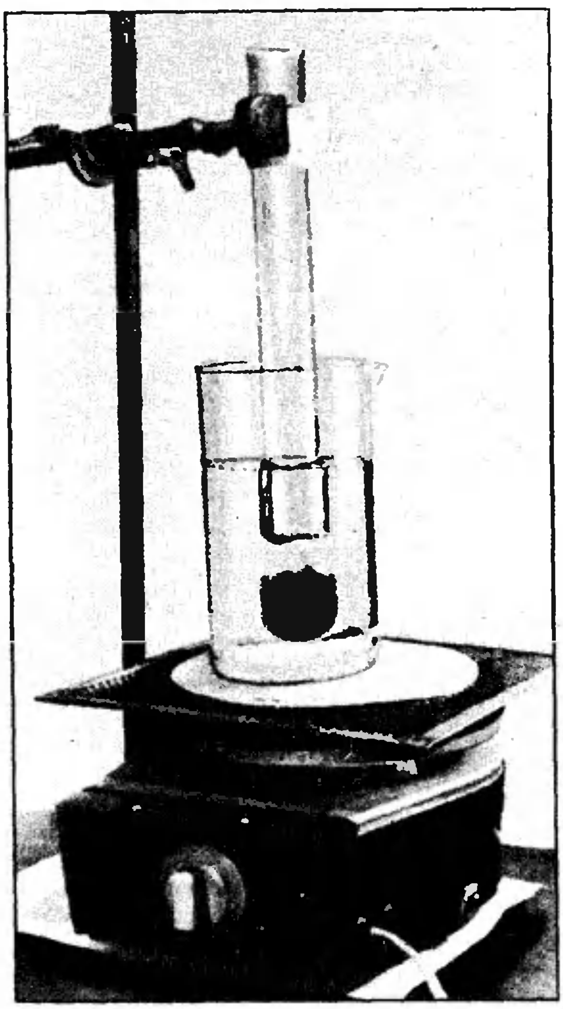


Рис. 1.

Любопытно отметить, что пузырьки, образующиеся при кипении, выходят на поверхность воды и лопаются. Пары четыреххлористого углерода конденсируются, и образовавшиеся капли снова опускаются вниз.

Четыреххлористый углерод и толуол входят в перечень реактивов, имеющихся в школьном кабинете химии. Но не следует забывать, что они являются достаточно вредными веществами, поэтому экспериментировать с ними необходимо с соблюдением всех мер предосторожности — пользуясь небольшими количествами реактивов, проводя опыты в вытяжном шкафу.

Доступным и легко выполнимым экспериментом по наблюдению пограничного кипения является опыт с керосином, налитым поверх воды в пробирку (керосин тоже можно подкрасить капелькой раствора йода). Хорошо видно, что кипение начинается именно на границе раздела жидкостей, однако температура пограничного кипения при этом близка к температуре кипения воды, что вносит в эксперимент определенные трудности.

Заметим, что при нагревании водяной бани во всех опытах следует пользоваться только электронагревателем (электроплиткой) и ни в коем случае не использовать открытый огонь (газовую горелку, спиртовку).

А можно ли заранее предсказать температуру пограничного кипения? Для четыреххлористого углерода и воды, например, сделать это нетрудно, если располагать данными о зависимости давления насыщенных паров этих жидкостей от температуры. На рисунке 2 сплошными линиями представлены графики температурной зависимости давления насыщенных паров воды и четыреххлористого углерода, а штриховой линией показан суммарный график $p_к(T) = p_{н\,H_2O}(T) + p_{н\,CCl_4}(T)$. Точка пересечения последнего графика с прямой $p = p_0 = 760$ мм рт. ст. и дает температуру кипения на границе вода — четырех-

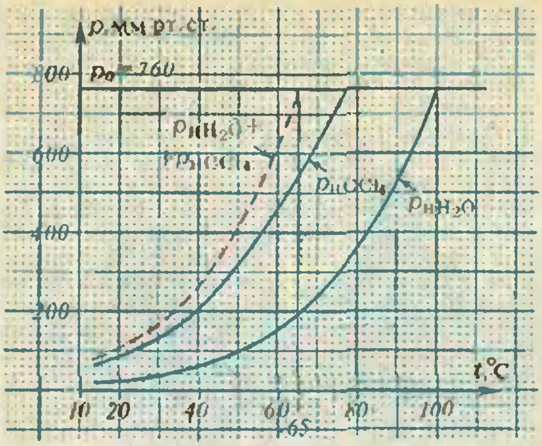


Рис. 2.

хлористый углерод: $T_к=65$ °С. При этом давление паров H_2O равно 190 мм рт. ст., а давление паров CCl_4 составляет 570 мм рт. ст., что в сумме дает нормальное атмосферное давление, т. е. 760 мм рт. ст.

К сожалению, такой простой расчет приводит к достоверному результату не всегда — зачастую следует принимать во внимание взаимную растворяемость компонентов.

Любопытно, что если поддерживать пограничное кипение в течение некоторого времени, то можно заметить, что четыреххлористый углерод выкипает значительно быстрее, чем вода. Как вы думаете, с чем это связано? Попробуйте оценить, во сколько раз быстрее выкипает CCl_4 по сравнению с водой (плотность четыреххлористого углерода $\rho=1600$ кг/м^3).

Давление насыщенных паров

Мы привыкли к тому, что для определения давления насыщенных паров воды при данной температуре надо воспользоваться справочными таблицами. А нельзя ли попробовать самим получить температурную зависимость давления насыщенного пара, т. е. выступить в роли экспериментатора — составителя таблицы?

Рассмотрим один из простых методов получения такой зависимости, которым вы сможете воспользоваться. Установка для проведения опыта представляет собой наполненный холодной водой химический стакан, в который погружена перевернутая вверх дном пробирка с нанесенными на ее стенки делениями. Пробирку и термометр можно укрепить в стоящем на столе лабораторном штативе с лапками.

Частично заполним пробирку водой, установим стакан с перевернутой пробиркой и термометром на электрической плитке и начнем нагревание. По мере увеличения температуры воды будем записывать данные об изменении объема газа в пробирке, т. е. фиксировать нанесенные на стенки пробирки деления.

Газ в пробирке представляет собой смесь воздуха и насыщенных паров воды. Суммарное давление, естественно, равно атмосферному давлению (давлением водяного столба в стакане можно пренебречь, поскольку оно составляет лишь несколько мм рт. ст.):

$$p_0=p_в(T)+p_н(T).$$

Здесь $p_в(T)$ — давление воздуха в пробирке и $p_н(T)$ — давление насыщенных паров при температуре T. В начале опыта давлением паров воды можно пренебречь — при 20 °С оно составляет всего лишь 17 мм рт. ст. Однако с ростом температуры водяной пар дает все более заметный вклад.

Используя уравнение Менделеева — Клапейрона, для воздуха в пробирке запишем

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_вV}{T}, \text{ и } p_в=p_0\frac{V_0}{V}\frac{T}{T_0},$$

где p_0 — начальное давление (равное атмосферному), V_0 и T_0 — соответственно начальные объем и температура воздуха. Теперь, зная, как меняются объем и температура, мы можем найти давление насыщенного пара при данной температуре:

$$p_н=p_0\left(1-\frac{T}{T_0}\frac{V_0}{V}\right).$$

Полученная таким образом экспериментальная зависимость давления насыщенного пара от температуры хорошо согласуется со справочными данными. Особенно хорошее согласие наблюдается при температурах выше 80 °С — ошибка составляет менее 5 %. При низких температурах точность этого метода падает. Подумайте, с чем это связано, каковы основные источники ошибок и как можно было бы повысить точность предлагаемого метода. Попробуйте поставить лабораторную работу по определению температурной зависимости давления насыщенного пара в вашем школьном кабинете физики.

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1001—М1015, Ф1013—Ф1027, справились с задачами М1001, М1003—М1005, М1007, М1009, М1011, М1015, Ф1013—Ф1015, Ф1020, Ф1023, Ф1024. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

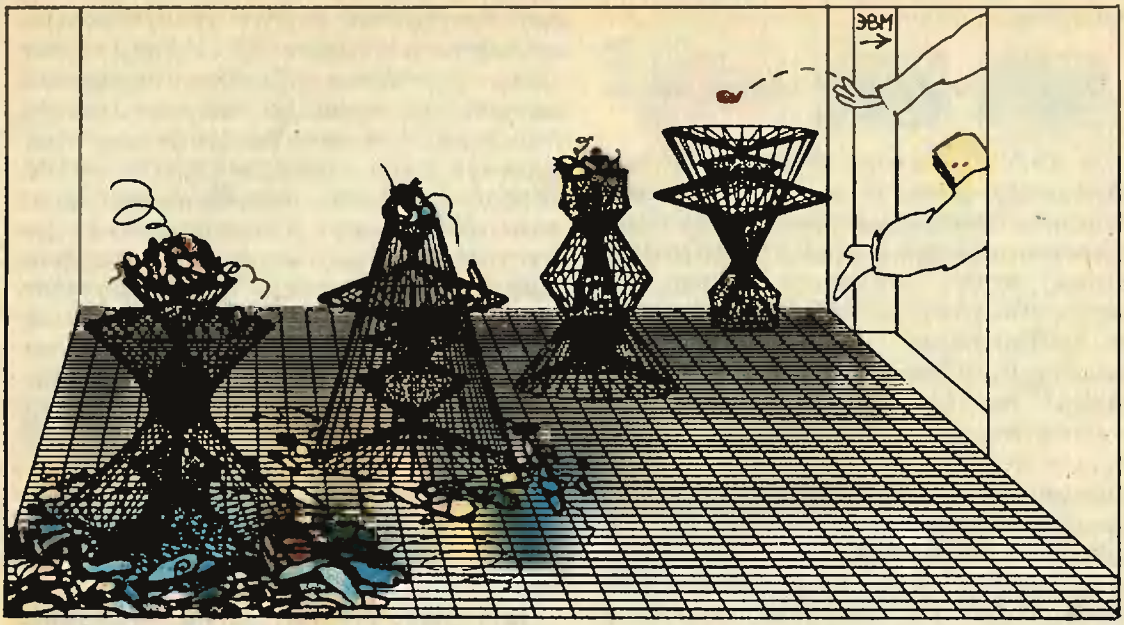
Математика

А. Абдрахманов (Алма-Ата) 02, 14; *В. Акопян* (Ереван) 13, 14; *Д. Алиевский* (Свердловск) 12—14; *Д. Ароцкер* (Киев) 02, 06; *С. Аршава* (Северодонецк) 02, 06, 13, 14; *Р. Асадуллаев* (Масаллы) 06; *В. Базуткин* (Кривой Рог) 06, 08; *З. Бандик* (СФРЮ) 06; *А. Барабанов* (Киев) 02, 06; *С. Безека* (Москва) 06; *Р. Безрукавников* (Калуга) 02; *А. Бейянку* (СРР) 06; *И. Белозеров* (Серпухов) 02, 13, 14; *В. Бергман* (Баку) 06, 08, 14; *Д. Берзин* (Калуга) 02, 06, 08; *Э. Бесаев* (Тбилиси) 06, 13; *В. Бугайко* (Киев) 06, 08; *А. Бурштейн* (Москва) 02, 06; *П. Бучин* (Киев) 06, 12—14; *Я. Варшавский* (Харьков) 02, 06, 08; *А. Винцюк* (Киев) 02, 06, 13; *А. Витяев* (Новосибирск) 06, 08, 13; *В. Вологодский* (Омск) 02, 08, 12—14; *Я. Второв* (Киев) 06; *Ю. Выменец* (Ленинград) 02; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 06; *О. Геворков* (Тбилиси) 13, 14; *И. Георгиева* (София, НРБ) 06; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 08, 13, 14; *А. Глуцюк* (Харьков) 06, 08; *В. Голованов* (Киев) 06, 08; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 06, 08, 10, 13, 14; *А. Гороховский* (Киев) 06; *В. Гравит* (Северодвинск) 02; *Р. Гринив* (Львов) 08, 13, 14; *Д. Грънчаров* (София, НРБ) 06; *А. Гусев* (Белорецк) 06; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 06; *Т. Данелия* (Тбилиси) 06, 08; *О. Джавадов* (п. Борадыгях АзССР) 06; *А. Донченко* (Киев) 02; *Н. Дохоян* (Тбилиси) 13; *С. Дронов* (Пущино) 06; *А. Дубинский* (Москва) 13, 14; *И. Дынников* (Жуковский) 06, 08; *Р. Ельчиев* (с. Арчуг АрмССР) 13; *В. Емец* (Киев) 08; *Д. Зайцев* (Киев) 02, 06, 08; *И. Зефиров* (Химки) 06, 08; *В. Иванов* (Тбилиси) 14; *Н. Илиев* (НРБ) 06, 08, 14; *В. Кальницкий* (Калининград) 08, 14; *Б.* и *М. Каримовы* (Алма-Ата) 06; *Т. Касумов* (Баку) 06, 08, 13, 14; *О. Кирнасовский* (Винница) 14; *О. Коврижкин* (Майкоп) 14; *А. Козинский* (Гайворон) 06, 08; *Г. Коленицкий* (Тбилиси) 14; *М. Колесницкий* (Тбилиси) 06, 13; *А. Константин* (СРР) 06, 08; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 14; *А. Коршков* (Мозырь) 02, 06, 08, 12—14; *П. Кострикин* (Караганда) 06, 08, 12—14; *В. Крепец* (Новосибирск) 06; *А. Кривенко* (Киев) 06; *Б. Кругликов* (Харьков) 06, 08, 13, 14; *В. Крушкаль* (Новосибирск) 13; *В. Куватбекова* (Фрунзе) 06; *Д. Куцемако* (Саратов) 14; *И. Кучугурин* (Новый Уренгой) 02; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 13; *О. Лимешко* (Куйбышев) 06, 08, 12—14; *М. Литвинов* (Киев) 02, 08; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 06, 08, 13, 14; *В. Ляндин* (Белорецк) 02, 06, 08, 14; *А. Малор* (Киев) 06; *М. Макичян* (Ереван) 13, 14; *А. Макогон* (Киев) 02, 06, 08; *Р. Малендевич* (Болехов) 02, 06, 08; *А. Мельник* (Гайворон) 06, 08; *А. Мельцер* (Ленинград) 08, 12—14; *А. Мигло* (Ленинград) 06; *В. Мильто* (Киев) 06, 08; *Г. Минасянц* (Ереван) 06, 08; *З. Мустафаев* (Баку) 06; *Я. Мустафаев* (Баку) 12—14; *С. Мушинский* (Новосибирск) 02, 06; *А. Назарян* (Тбилиси) 06, 08, 12—14; *И. Нарский* (Воронеж) 06, 14; *Ю. Ним* (п. Черноголовка Московской обл.) 06; *А. Новиченок* (Вильнюс) 14; *С. Павлов* (Черновцы) 13, 14; *П. Пасманик* (Москва) 06, 08, 14; *М. Пасуманский* (Ленинград) 08, 14; *О. Пелевин* (Кострома) 06, 13, 14; *З. Петренко* (Херсон) 14; *А. Петрова* (Ленинград) 06; *А. Петрова* (Пермь) 14; *А. Покровский* (Киев) 02, 06; *В. Полинов* (Магнитогорск) 06, 13, 14; *А. Полищук* (Москва) 12, 13; *В. Помаз* (Семеновка) 06; *И. Портной* (Одесса) 02; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 13, 14; *В. Пушня* (Харьков) 02, 08, 13, 14; *Ш. Рагимов* (Ульяновск) 13; *В. Рагулин* (Челябинск) 12—14; *С. Резнов* (Киев) 02, 08; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 06; *Д. Румынин* (Красноярск) 08, 14; *Э. Сайдаматов* (п. Кук-Терек Ташкентской обл.) 13; *Б. Сайнбаяр* (МНР) 06, 14; *И. Самовол* (Гайворон) 06, 08; *С. Сефибеков* (Кашкент) 06; *С. Сильвестров* (Киев) 02, 06, 08; *В. Слитинский* (Киев) 02, 06, 08, 12—14; *А. Смирнова* (Киров) 12—14; *В. Соловьев* (п. Купавна Московской обл.) 02; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 02; *В. Столин* (Вильнюс) 08, 12—14; *Д. Тамаркин* (Горький) 08, 10, 13, 14; *А. Тарасенко* (Днепропетровск) 06, 08; *А. Терехов* (Алма-Ата) 12—14; *Д. Туляков* (Жданов) 13, 14; *И. Устиловский* (Москва) 06, 08; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 06, 13, 14; *Ф. Фот* (Томск) 06; *А. Френкель* (Магнитогорск) 13, 14; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 06, 08; *К. Хриневски* (ПНР) 06, 08; *О. Христенко* (Караганда) 06, 08, 13, 14; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 02, 06, 08, 13, 14; *Р. Чижек* (ЧССР) 14; *Т. Чудиновских* (Целиноград) 06, 14; *Е. Чурикова* (Целиноград) 06; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 06, 08; *И. Шехтман* (Киев) 06; *Я. Эфендиев* (Баку) 06, 13; *А. Яврян* (Ереван) 06, 14; *М. Ямпольский* (Харьков) 06.

Физика

Х. Акимов (к/х «Москва» Хорезмской обл.) 16—19, 21, 22; *А. Андрианов* (Кузнецовск) 17; *А. Анисимов* (Киев) 16, 17; *А. Антонов* (Москва) 16, 18, 26; *У. Аскаров* (Хорезмская обл.) 21; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 17, 18, 22, 25; *Х. Атабаев* (к/х «Москва» Хорезмской обл.) 22; *Г. Ахмедов* (Сумгаит) 16—18, 26; *Т. Ахметов* (Новосибирск) 26, 27; *С. Беловолов* (Новосибирск) 26; *С. Белоусов* (Петродворец) 16—18, 26; *Д. Берадзе* (Тбилиси) 18; *Д. Берзин* (Калуга) 16—18, 22; *А. Бесолов* (Кишинев) 16; *А. Билибин* (Боровичи) 18; *С. Бобылев* (Березники) 18, 21, 26, 27; *А. Болотников* (Кузнецовск) 17; *Д. Будько* (Белгород) 16—19, 21, 22; *А. Быцко* (Ленинград) 26; *М. Ваганов* (п. Черноголовка Московской обл.) 18, 19; *В. Вергелес* (Винница) 18; *Р. Вергелес* (Винница) 18, 26; *А. Винцюк* (Киев) 16, 25; *П. Вольфбейн* (Киев) 17, 18, 22, 25; *А. Гаек* (Днепропетровск) 18; *А. Гамаюнов* (Полтава) 26, 27; *С. Герасимов* (Харьков) 17, 18, 27; *А. Гольдин* (с. Водяное Львовской обл.) 16—18, 22; *В. Горбовец* (Свердловск) 26; *Д. Горелик* (Электросталь) 16, 18; *К. Горячев* (Тула) 26; *Г. Гриднев* (Тбилиси) 18; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—19, 22; *Д. Гуторов* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *С. Дикий* (Черкассы) 26, 27; *С. Дронов* (Пущино) 18; *Л. Евсеев* (Димитровград) 18; *Д. Евтушенко* (Донецк) 16, 18; *Д. Ежиков* (Минск) 16, 18; *А. Езерский* (Минск) 18, 26; *Д. Жильцов* (Краматорск) 21;

(Окончание см. на с. 46)



Искусство программирования

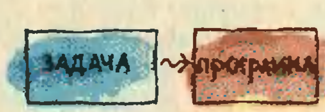
Проверка правильности алгоритмов

Кандидат технических наук
В. А. КАЙМИН

Составление программ — это искусство, наука или ремесло? Можно ли составлять программы и гарантировать, что в них нет ошибок? Эти два вопроса — предмет жарких научных дискуссий, столкновения мнений и серьезных исследований. Попробуем разобраться.

Можно выделить три подхода к составлению программ для вычислительных машин.

Первый подход — назовем его *традиционным* — состоит в написании программ на некотором языке программирования (бейсик, фортран, ПЛ/1, кобол и т. п.) сразу по содержательным формулировкам задач:



Языки программирования, как правило, имеют английскую лексику, и программы на этих языках трудно читать, понимать и изучать людям, для которых английский язык не является родным. При составлении программ при традиционной практике почти всегда в них вносится большое число ошибок, и составитель программы как можно скорее стремится выйти на ЭВМ и начать отладку программы.

Количество ошибок в программе заранее никому не известно, а потому никому не известно, когда закончится отладка программы. Более того, когда авторы программ заявляют, что их программы полностью отлажены, в этих программах обычно еще имеются ошибки.

Второй подход к составлению программ, который принято называть *структурным программированием*, состоит в тщательном продумывании логики решения задач и создании структурированных алгоритмов. Эти алгоритмы мы советуем записывать на школьном алгоритмическом языке из вашего учебника и только после этого переводить запись программы на один из языков программирования. Схему составления программ можно изобразить так:

При таком подходе легко разделить синтаксические и алгоритмические ошибки. *Синтаксические ошибки* (нарушения правил языка программирования) могут появиться только при неправильном кодировании программ по алгоритмам. *Алгоритмические ошибки* (нарушения в логике решения задач) возникают при составлении алгоритмов; их поиск и исправление может проводиться по описаниям алгоритмов до написания и испытания программ на ЭВМ.

Третий подход, который мы называем *систематическим конструированием программ*, является развитием второго. Схематически его можно изобразить следующей диаграммой:

Более подробно об этом подходе рассказано в «Кванте» (1986, № 10, с. 47 и № 11, с. 40).

Проверка программы на ЭВМ включает тщательно спланированные испытания на соответствие работы машины сценарию программы. Проверка состоит в апробации всех основных частных случаев постановок задач, проверке граничных условий, проверке реакций программы на недопустимые данные и недопустимые действия со стороны человека. На этой стороне — связанной со сценарием диалоговых программ (см. «Квант», 1986, № 11, с. 40) — мы здесь подробнее останавливаться не будем.

Выявление ошибок и обоснование правильности программ при таком подходе проводится путем логических рассуждений, целью которых являются доказательства — будет или не будет программа давать требуемые результаты и сообщения? Полная гарантия отсутствия ошибок возможна только при наличии *математических постановок решаемых задач* и детальном *описании сценария* работы с ЭВМ. В этой ситуации программу мы назовем *правильной*, если при любых допустимых исходных данных она формирует результаты, строго соответствующие требованиям постановок задач, и ее работа полностью соответствует сценарию при любых действиях пользователя. Программа содержит ошибки, если можно указать такие данные, при которых машина даст результаты, противоречащие требованиям постановок решаемых задач, либо ее работа не будет соответствовать описанию сценария программы.

Мы рассмотрим здесь несколько примеров обоснования правильности отдельных фрагментов программ, написанных на школьном алгоритмическом языке (часть заголовка программ мы для краткости опускаем).

Пример 1 (задача на вычисление).

```
алг «вычисление x^5»
нач v:=x·x
    v:=v·v
    y:=v·x
кон
```

результаты $\begin{cases} v_1=x\cdot x, \\ v_2=v_1\cdot v_1, \\ y=v_2\cdot x. \end{cases}$

Обратите внимание, что переменной v в процессе работы алгоритма присваивается несколько значений, поэтому в записи результатов мы снабжаем букву v числовыми индексами. На основании этой программы мы делаем следующее

Утверждение. $y=x^5$.

Доказательство. Из описания результатов выполнения операций имеем

$$y=v_2\cdot x=(v_1\cdot v_1)\cdot x=((x\cdot x)\cdot(x\cdot x))\cdot x=x^5.$$

Пример 2 (алгоритм с участием ветвления).

```
алг «вычисление |x|»
нач если x>0
      то y:=x
      иначе y:=−x
    все
кон
```

результаты $y=\begin{cases} x \text{ при } x>0, \\ -x \text{ при } x\leqslant 0. \end{cases}$

Утверждение. Эта программа всегда дает $y=|x|$.

Доказательство проводится разбором случаев. При $x>0$ выполняется первая альтернатива. В результате присваивания величина станет равной $y=x$, что соответствует определению модуля для положительных чисел. При $x \leqslant 0$ выполняется вторая альтернатива, и в результате присваивания величина y получит значение $y=-x$, что также соответствует определению модуля, но для отрицательных чисел. Таким образом, в обоих случаях величина y будет равна абсолютному значению числа x.

Пример 3 (алгоритм с участием «цикла для»).

```
алг «суммирование массива»          результаты
арг вещ x[1:n]
рез вещ y
нач s:=0                            s_0=0,
    для k от 1 до n                 s_k=s_{k-1}+x[k]
    нц s:=s+x[k]                    (k=1, 2, ..., n),
    кц                              y=s_n.
      y:=s
кон
```

Утверждение. Эта программа дает $y=x[1]+\ldots+x[n]$.

Доказательство проводится, конечно же, по индукции. Начало индукции ($s_0=0$) есть (см. описание результатов); нам нужно из индуктивного предположения

$$s_{k-1}=x[1]+\ldots+x[k-1]$$

получить аналогичную формулу для s_k. Но из описания результатов следует

$$s_k=s_{k-1}+x[k]=\\=(x[1]+\ldots+x[k-1])+x[k]=\\=x[1]+\ldots+x[k].$$

Поэтому по индукции получаем $s_n=x[1]+\ldots+x[n]$. А последнее присваивание дает для y значение s_n, так что

$$y=x[1]+\ldots+x[n].$$

Пример 4 (задача с использованием вспомогательного алгоритма).

Для доказательства правильности вспомогательных алгоритмов необходимы математические постановки решаемых ими подзадач. Соответствующие доказательства проводятся независимо от обоснования правильности алгоритмов в целом, а доказательства правильности алгоритмов в целом опираются на утверждения о правильности работы соответствующих вспомогательных алгоритмов.

```
алг площадь треугольника
арг вещ x[1:n], y[1:n]
рез вещ S
нач
a:=dl(x[1], y[1], x[2], y[2])
b:=dl(x[2], y[2], x[3], y[3])
c:=dl(x[3], y[3], x[1], y[1])
p:=(a+b+c)/2
S:=√(p(p−a)(p−b)(p−c))
кон
```

```
алг длина вектора                       результаты
арг вещ v1, u1, v2, u2
рез вещ dl
нач dv:=v1−v2                           dv=v1−v2,
    du:=u1−u2                           du=u1−u2,
    dl:=√(dv²+du²)                      dl=√(dv²+du²).
кон
```

Учитывая результаты вспомогательного алгоритма, легко выписать результаты для основного алгоритма:

$$a=\sqrt{(x[1]-x[2])^2+(y[1]-y[2])^2},$$
$$b=\sqrt{(x[2]-x[3])^2+(y[2]-y[3])^2},$$
$$c=\sqrt{(x[3]-x[1])^2+(y(3)-y[1])^2},$$
$$p=(a+b+c)/2,$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Воспользовавшись этими результатами, нетрудно доказать (мы это оставляем читателю), что для любых пар чисел $(x[i];\ y[i])=A_i$, $i=1, 2, 3$, алгоритм выдает значение S, равное площади треугольника $A_1A_2A_3$.

Большие и сложные программы — это, как правило, большое количество небольших вспомогательных алгоритмов (подпрограмм), предназначенных для решения вспомогательных подзадач. Анализ правильности больших программ такого вида состоит из доказательств правильности целой серии утверждений о правильности каждого вспомогательного алгоритма, а уже затем о правильности подпрограмм и программ в целом.

Единственный принципиально сложный тип проверки связан с анализом завершимости и обоснованием правильности построения циклов вида «пока — цикл». Для всех алгоритмов и программ, не использующих этих циклов, как мы видели, доказательства правильности могут производиться с помощью элементарных логических рассуждений. В простейших ситуациях обоснование завершимости циклов «пока» тоже получается элементарно.

Пример 5 (алгоритм с участием цикла «пока»).

```
алг «вычисление (1−x)»                  результаты
арг вещ x, eps
рез вещ y
нач
  s:=1+x                                s_1=1+x,
  v:=x                                  v_1=x,
  пока |v|≥eps                          v_k=v_{k-1}·x,
    нц                                  s_k=s_{k-1}+v_k
      v:=v·x                            (k=2, 3, ..., если |v_k|≥eps).
      s:=s+v                            y = { s_k при |v_k|<eps,
    кц                                        ?   при |v_k|≥eps.
  y:=s
кон
```

Утверждение. Описанный алгоритм при $eps>0$ и $|x|<1$ всегда завершает свою работу и получает такое значение y, что

$$|y-(1-x)^{-1}|<eps/(1-x).$$

Доказательство строится из двух индуктивных утверждений:

а) $v_k=x^k$ при $k=1, 2, \ldots$; б) $s_k=1+x+x^2+\ldots+x^k$. Оба утверждения а) и б) легко доказываются по индукции, если воспользоваться описанием результатов. Из б) и формулы суммы геометрической прогрессии

$$s_k=1+x+\ldots+x^k=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}. \qquad (1)$$

По условию цикла **пока**, работа цикла завершится при $|v|<eps$, т. е. (в силу условия а)) при $|x^k|<eps$. Значит, при выполнении условия $|x^k|<eps$ (которое обязательно наступит, ибо $|x|<1$ и $eps>0$) произойдет присваивание $y:=s$, и в силу формулы (1)

$$\left|y-\frac{1}{1-x}\right|=\left|\frac{1-x^{k+1}}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right|=$$
$$=\frac{|x^{k+1}|}{1-x}<\frac{eps}{1-x}.$$

В заключение заметим, что мы рассматривали здесь лишь простейшие примеры доказательства правильности программ. В более сложных случаях проверка становится более трудоемкой, но эта работа окупает себя, позволяя с карандашом и бумагой, до выхода на машину, избежать нескончаемой отладки за пультом ЭВМ. Можно сказать, что составление и проверка программ на ЭВМ — это ремесло, конструирование, обоснование правильности и улучшение алгоритмов — это наука, а составление сценария — пока искусство. Желающим более глубоко познакомиться с принципами доказательного программирования рекомендуем прочитать следующие книги:

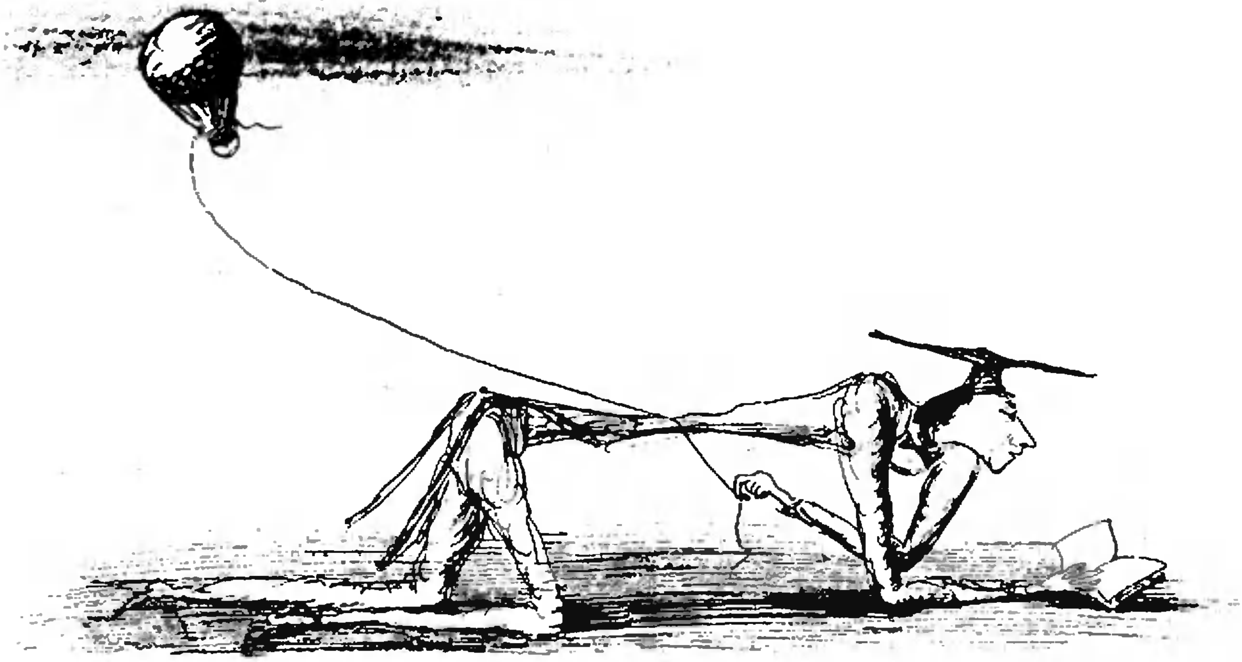
1. Дийкстра Э. *Дисциплина программирования.* — М.: Мир, 1979.

2. Грис Д. *Наука программирования.* — М.: Мир, 1984.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 42)

И. Жуманиезов (Хива) 19; *П. Задорожный* (Киев) 16—19, 21, 25, 26; *Е. Зельцер* (Киев) 17; *А. Зискинд* (Винница) 16, 18, 26; *С. Иванов* (Киев) 26; *Д. Изотов* (Ногинск) 17, 18; *А. Ильенков* (Киев) 17, 18; *Д. Исильманова* (Целиноград) 17, 18, 22; *Б. Исмагилов* (Москва) 18; *А. Калашников* (Киев) 18; *С. Канатов* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *В. Каневский* (Киев) 18; *В. Кирюхин* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—19; *В. Клименко* (Первомайск Николаевской обл.) 18; *И. Климчук* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *А. Кобылинский* (Киев) 18; *И. Коваленко* (с. Термаховка Киевской обл.) 18; *Е. Корсунский* (Харьков) 18; *А. Корытько* (Киев) 18; *П. Кострикин* (Караганда) 18, 19; *Г. Кравченко* (Кузнецовск) 17; *Ю. Кравченко* (Москва) 17, 18, 27; *М. Куанышева* (Рудный) 26; *С. Курдюков* (Москва) 16, 17, 25, 26; *А. Кусаинов* (Алма-Ата) 18, 19, 21, 26; *Д. Кучулория* (Тбилиси) 16; *К. Литвиненко* (Херсон) 18, 26; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 17; *Е. Лойченко* (Киев) 18; *И. Лугач* (Винница) 16—19, 21, 22, 26, 27; *Р. Маленде-вич* (Болехов) 18, 19; *Л. Митосериу* (СРР) 18; *А. Мищенко* (Киев) 18, 26; *В. Мороз* (Ленинград) 26, 27; *А. Муравьев* (Рига) 27; *А. Недачин* (Киев) 16—19, 21, 22, 26, 27; *А. Никитин* (Ленинград) 26, 27; *Д. и П. Николаевы* (п. Черноголовка Московской обл.) 17; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 18, 19, 26; *А. Носенко* (Коммунарск) 18; *Д. Орел* (Воркута) 26, 27; *С. Павлов* (Дно) 26; *О. Паруш* (Выборг) 16, 18; *Д. Пастухов* (Витебск) 26, 27; *А. Петров* (Калуга) 26; *Д. Плотник* (Алма-Ата) 18, 19; *А. Подольский* (Киев) 18; *А. Португалов* (Киев) 16, 17; *С. Примазон* (Ломоносов) 18; *Д. Пучкин* (Севастополь) 26; *У. Рахманов* (Ташкент) 18; *Г. Рекуц* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 18; *В. Родин* (Сасово) 17, 22, 25—27; *А. Розенберг* (Уфа) 16—19, 22; *Е. Рознощик* (Киев) 16, 17, 19; *А. Романов* (Загорск) 26; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 16—18, 22; *С. Сазонов* (Климовск) 18; *Д. Самборский* (Истра) 18, 19, 21; *В. Сафонов* (Челябинск) 18, 19, 21; *М. Сергазин* (Алма-Ата) 18, 19, 21; *В. Синенко* (Канев) 17; *В. Служаев* (Димитровград) 18, 19; *В. Смирнов* (Тихвин) 26; *А. Ставицкий* (Баку) 16, 17; *А. Стародубов* (Алма-Ата) 18, 19, 21; *В. Старцев* (Алма-Ата) 26; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 16—18, 22, 26; *И. Стригунов* (Брест) 17, 18, 26; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 16—19; *В. Суворов* (Свердловск) 18, 26; *А. Суходуб* (Харьков) 26; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) 26; *А. Ткаченко* (Киев) 16—18, 22; *М. Турлаков* (Фрунзе) 18; *А. Турсунбеков* (Ташкент) 18; *В. Тягнирядно* (Минск) 26, 27; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 18; *В. Ушаков* (Магадан) 18; *Г. Фейгин* (Тула) 26; *А. Фурс* (п/о Дричин Минской обл.) 16—19, 21, 22, 26; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 26; *Г. Хачатрян* (п. Берд АрмССР) 18; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 18, 26, 27; *И. Химони* (Днепропетровск) 18; *А. Цветков* (Златоуст) 18; *И. Чайка* (Кузнецовск) 17, 18, 26, 27; *М. Чекушина* (Алма-Ата) 18, 19, 21; *О. Чепиков* (Могилев) 16, 18; *А. Чернышев* (Сочи) 26; *Р. Чмырь* (Фрунзе) 18; *Т. Шапаева* (Москва) 18; *А. Шишкин* (Новый Уренгой) 26; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 18, 26; *Н. Юдина* (п. Майна Ульяновской обл.) 18; *Ю. Яровой* (Канев) 16, 18, 26.



Практикум абитуриента

Задачи на газовые смеси

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ

На приемных экзаменах в вузы абитуриентам нередко предлагают задачи, в которых рассматриваются не чистые газы (водород, кислород и т. д.), а смеси нескольких газов. Эти задачи важны потому, что на практике чаще приходится иметь дело именно с газовыми смесями. Так, например, воздух состоит из смеси азота, кислорода, углекислого газа с примесью других газов. Влажный воздух содержит также и водяной пар.

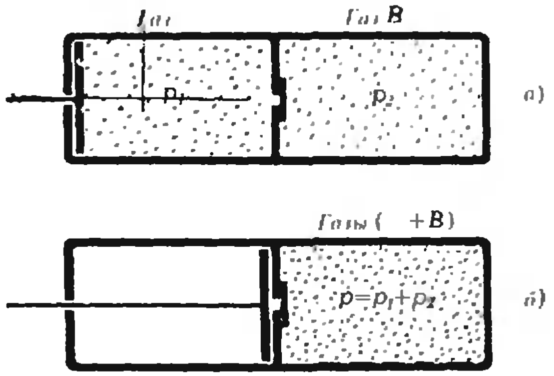
Задачи на газовые смеси по существу мало отличаются от задач на законы идеальных газов. Если по условию задачи состав газовой смеси не изменяется, можно рассматривать смесь как один идеальный газ с некоторым усредненным значением молярной массы. Так, сухому воздуху часто приписывают молярную массу $M_в = 29$ г/моль, усредненную по его основным компонентам. Однако, если состав смеси изменяется, понятие усредненной молярной массы теряет смысл, и с использованием уравнения газового состояния возникают некоторые затруднения. В этом случае полезно ввести понятие парциального давления — так принято называть давление, оказываемое каким-либо чистым газом из состава смеси, когда все другие газы из сосуда удалены.

Если газы достаточно разрежены (так что их можно считать идеальными) и химически не взаимодействуют друг с другом, молекулы разных газов не оказывают влияния друг на друга, и каждый газ в смеси ведет себя так, как если бы других газов не было вовсе. Отсюда следует, что общее давление смеси равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Этот закон был экспериментально установлен английским физиком Дальтоном и был назван его именем. Поясним закон Дальтона и понятие парциального давления на примере.

Два разных газа A и B помещены в две камеры одинакового объема и создают давления p_1 и p_2 (см. с. 48). При помощи поршня газ из одной камеры через клапан выталкивается в другую камеру. Температура при этом поддерживается неизменной и одинаковой во всей системе. В результате во второй камере устанавливается



давление $p=p_1+p_2$. Давления p_1 и p_2 в данном случае и есть парциальные давления разных газов, а в соответствии с законом Дальтона они складываются в общее давление p.

Отметим еще раз, что закон Дальтона справедлив только для идеальных газов с невзаимодействующими молекулами. Как показывает опыт, при достаточно высоких давлениях (порядка десятков атмосфер) наблюдаются отклонения от этого закона.

Если для каждого газа записать уравнение Менделеева — Клапейрона, то из закона Дальтона для смеси газов получим

$$pV=\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}+\ldots+\frac{m_n}{M_n}\right)RT,$$

или

$$pV=(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n)RT,$$

где $\nu_i=m_i/M_i$ — число молей данного газа в смеси. Это соотношение называют уравнением состояния газовой смеси. Учитывая закон Авогадро, согласно которому моль любого вещества содержит $N_A=6{,}02\cdot 10^{23}$ молекул (N_A — число Авогадро), последнее равенство можно переписать в виде

$$pV=(\nu_1 N_A+\nu_2 N_A+\ldots+\nu_n N_A)\frac{R}{N_A}T=$$
$$=(N_1+N_2+\ldots+N_n)kT=NkT.$$

Здесь $N_i=\nu_i N_A$ — число молекул соответствующего газа, $k=R/N_A=1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Таким образом, оказывается, что давление смеси газов при заданной температуре зависит только от полного числа молекул и не зависит от их сорта. Это одно из основных следствий молекулярно-кинетической теории идеальных газов.

Рассмотрим ряд задач на применение закона Дальтона и уравнения состояния газовой смеси. Все эти задачи в разные годы предлагались абитуриентам на письменном приемном экзамене в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *В сосуд объемом $V=10$ л, наполненный сухим воздухом при давлении $p_1=10^5$ Па и температуре $T_1=273$ К, вводят $m=3$ г воды. Сосуд нагревают до температуры $T_2=373$ К. Каково давление влажного воздуха при этой температуре?*

Давление влажного воздуха в сосуде складывается из парциальных давлений сухого воздуха и водяного пара:

$$p=p_в+p_п.$$

При этом

$$p_в=p_1\frac{T_2}{T_1}=1{,}37\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Считая пар идеальным газом с молярной массой $M=18$ г/моль и предполагая, что вся вода испарится, найдем

$$p_п=\frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}=0{,}52\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Это давление меньше давления насыщенного пара при температуре 373 К, которое равно $p_н=10^5$ Па. Следовательно, пар ненасыщен, и наше предположение было правильным.

Таким образом,

$$p=p_в+p_п=1{,}89\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Задача 2. *В сосуде постоянного объема при температуре $T_1=300$ К находится $\nu_1=1$ моль неона и $\nu_2=2$ моля водорода. Давление в сосуде $p_1=10^5$ Па. Когда температуру повысили до $T_2=2400$ К, давление возросло до $p_2=8{,}8\cdot 10^5$ Па. Какая часть молекул водорода диссоциировала при этом на атомы?*

При температуре T_1 для смеси неона и молекулярного водорода можно записать уравнение

$$p_1V=(\nu_1+\nu_2)RT_1,$$

где V — объем сосуда.

Если обозначить степень диссоциации водорода, т. е. отношение числа распавшихся молекул к общему числу молекул до диссоциации, через α, то при температуре T_2 в сосуде окажется ν_1 молей неона, $(1-\alpha)\nu_2$ молей молекулярного водорода и $2\alpha\nu_2$ молей атомарного водорода. Уравнение состояния газовой смеси примет вид

$$p_2V=(\nu_1+\nu_2(1+\alpha))RT_2.$$

Из этих уравнений найдем

$$\alpha=\left(\frac{p_2T_1}{p_1T_2}-1\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}+1\right)=0{,}15.$$

Задача 3. *Сосуд объемом $2V=20$ л разделен на две равные части полупроницаемой неподвижной перегородкой из палладия. В одну половину сосуда введено $m_a=20$ г аргона, во вторую — $m_в=2$ г водорода. Известно, что через палладиевые перегородки может проникать (диффундировать) только водород. Какое давление установится в обеих половинах сосуда после окончания процесса диффузии? Температура в первой половине сосуда равна $T_1=300$ К, во второй — $T_2=600$ К. Молярная масса аргона $M_a=40$ г/моль, водорода $M_в=2$ г/моль.*

Если два сосуда с газом соединены трубкой, через которую газ может свободно перетекать, то при равновесии давления в обоих сосудах оказываются одинаковыми независимо от температур газов в каждом сосуде. В данной задаче речь идет не о перетекании газа из одной части сосуда в другую, а о диффузии водорода через проницаемую для него перегородку. В этом случае равновесие наступает при равенстве диффузионных потоков, которые пропорциональны среднему числу ударов молекул водорода о перегородку с той и другой стороны. Вспомним (см., например, «Физику 9», §7), что среднее число ударов пропорционально числу молекул в единице объема и средней тепловой скорости, которая в свою очередь пропорциональна корню квадратному из температуры.

Пусть через перегородку продиффундировало ν молей водорода. Тогда во второй половине сосуда осталось $(1-\nu)$ молей и условие равенства диффузионных потоков водорода запишется в виде

$$\nu\sqrt{T_1}=(1-\nu)\sqrt{T_2},$$

откуда

$$\nu=\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}=0{,}6.$$

После установления равновесия давление смеси аргона и водорода в первой половине будет равно

$$p_1=\left(\nu+\frac{m_a}{M_a}\right)\frac{RT_1}{V}=2{,}7\cdot10^5\ \text{Па},$$

а давление водорода во второй половине —

$$p_2=(1-\nu)\frac{RT_2}{V}=2{,}0\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Задача 4. *В толстостенном стальном баллоне объемом $V=10$ л находится $m_в=2$ г водорода и $m_к=32$ г кислорода при температуре $T_1=273$ К. В баллоне происходит взрыв, и водород соединяется с кислородом. Во сколько раз изменится давление, если после окончания реакции в баллоне установилась температура $T_2=373$ К?*

В начальном состоянии в баллоне находилось по одному молю водорода и кислорода. Давление p_1 смеси этих газов до реакции определяется из уравнения $p_1V=2RT_1$:

$$p_1=\frac{2RT_1}{V}=4{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

В реакцию образования воды вступает весь водород — 1 моль и половина кислорода — 1/2 моля; следовательно, после реакции в баллоне будет находиться 1 моль воды и 1/2 моля кислорода. Установившееся давление при температуре $T_2=373$ К зависит, прежде всего, от того, в каком состоянии находится вода — только в парообразном или частично и в жидком тоже. Как известно, при температуре 373 К (точка кипения воды) давление насыщенных водяных паров равно $p_н=10^5$ Па. Если бы вся образовавшаяся вода испарилась, ее парциальное давление не должно было бы превышать $p_н$. С другой стороны, из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что давление паров (если вся вода испарится)

$$p_п=\frac{RT_2}{V}=3\cdot10^5\ \text{Па}>p_н.$$

Таким образом, часть воды будет находиться в жидком состоянии, а парциальное давление паров будет равно $p_н$. Парциальное давление оставшегося в баллоне кислорода

$$p_к=\frac{1}{2}\frac{RT_2}{V}=1{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Следовательно, полное давление после окончания реакции

$$p_2=p_к+p_н=2{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Отсюда

$$\frac{p_2}{p_1}=0{,}55.$$

Задача 5. *Два теплоизолированных баллона соединены трубкой, перекрытой вентилем. В первом баллоне* *объемом $V_1=100$ л находится $m_2=1{,}4$ кг азота под давлением $p_1=1{,}5\cdot 10^6$ Па, во втором баллоне объемом $V_2=250$ л находится $m_2=1{,}2$ кг аргона под давлением $p_2=5\cdot 10^5$ Па. Какие давления и температуры установятся в баллонах, если открыть вентиль? Теплоемкость моля азота при постоянном объеме равна $C_1=(5/2)R$, теплоемкость моля аргона — $C_2=(3/2)R$. Молярные массы азота и аргона равны соответственно $M_1=28$ г/моль и $M_2=40$ г/моль.*

Первоначальные температуры азота и аргона найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$T_1=\frac{p_1V_1}{\nu_1R}=360\ \text{К},\quad T_2=\frac{p_2V_2}{\nu_2R}=500\ \text{К},$$

где $\nu_1=m_1/M_1=50$ моль и $\nu_2=m_2/M_2=30$ моль — количество молей азота и аргона.

Температура смеси T, установившаяся после открытия вентиля, определяется из первого закона термодинамики — внутренняя энергия системы при смешивании газов остается неизменной (теплообмен с окружающими телами отсутствует, система работы не совершает):

$$\nu_1C_1(T-T_1)-\nu_2C_2(T_2-T)=0,$$

откуда

$$T=\frac{\nu_1C_1T_1+\nu_2C_2T_2}{\nu_1C_1+\nu_2C_2}=400\ \text{К}.$$

Установившееся давление найдем из уравнения газового состояния смеси:

$$p=\frac{(\nu_1+\nu_2)RT}{V_1+V_2}=7{,}6\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Упражнения

1. В сосуде объемом $V=1$ л находится $m=0{,}28$ г азота при температуре $T=1800$ К. При этой температуре часть молекул $\alpha=30\ \%$ диссоциировала на атомы. Определите давление в сосуде.

2. В стальном баллоне объемом $V=60$ л содержится смесь водорода и кислорода общей массой $m=60$ г. Давление в баллоне при температуре $T=300$ К равно $p=3{,}28\cdot 10^5$ Па. Какая масса воды образуется из этой смеси, если водород и кислород вступят в реакцию?

3. Одинаковые массы водорода и гелия поместили в сосуд объемом V_1, который отделен от откачанного сосуда объема V_2 полупроницаемой перегородкой, через которую могут диффундировать только молекулы водорода. После окончания процесса диффузии давление в первом сосуде уменьшилось в 2 раза. Определите отношение V_2/V_1, если во время процесса температура поддерживалась постоянной.

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1986 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Горьковский (2), Омский (3), Саратовский (4), Уральский (5) и институты — Киевский педагогический (6), Московский архитектурный (7), Московский областной педагогический (8), Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта (9), Рижский политехнический (10), Томский политехнический (11), Московский авиационный технологический (12).

Математика

Алгебра

1(1). Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 минут вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определите все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

2(1). Два скрепера разной мощности, работая вместе, могут выполнить работу за 6 часов. Если бы первый проработал 4 часа, а затем второй — 6 часов, то они выполнили бы 80 % всей работы. За сколько часов каждый скрепер, работая отдельно, может выполнить всю работу?

3(1). При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5 % до 93,5 %. Определите минимально возможное число членов такой бригады.

4(4). Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, второй — 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а еще через 1 ч 30 мин догнал и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

5(4). Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за день третьей бригадой?

6(4). 40 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нем будет в 2 раза больше, чем в первом. Найдите вес раствора, находящегося в первом сосуде.

7(6). Смешали 30 %-ный раствор соляной кислоты с 10 %-ным и получили 600 г 15 %-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

8(6). К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды содержал раствор и какая была его концентрация?

9(9). Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 26, их произведение — 216. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

10(12). Найдите четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 112, а сумма средних членов равна 48.

11. Вычислите:

а) (10) $\frac{1}{16}\sqrt{192}-2{,}5\sqrt{\frac{4}{75}}-\frac{1}{234}\sqrt{98^2-71^2}$;

б) (10) $\dfrac{\sqrt[8]{3^{11}}\cdot\sqrt[8]{3^{21}}}{\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}}$;

в) (10) $\dfrac{(2-\sqrt{3})(\cos 750^\circ+\cos 420^\circ)}{\sin 330^\circ+\cos(-390^\circ)}$;

г) (10) $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$;

д) (9) $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$ при $\alpha=15^\circ$;

е) (11) $\sin(2\alpha-\pi)$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$;

ж) (8) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$;

з) (11) $\operatorname{tg}_{\sqrt{6}}3\cdot\log_3 36$.

12. Выполните действия:

а) (11) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{x^4}{a^3-x^3}$;

б) (11) $\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2}+\frac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$ и вычислите при $a=0{,}3$; $b=1{,}7$;

в) (11) $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$ и вычислите, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2$;

г) (11) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\times\sin(\pi+\alpha)$;

д) (10) $\sqrt{10}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

13(6). Докажите тождество
$\sin^3 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)=\sin x+\cos x$.

14(6). При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2+x-a(1+a)=0$ имеют разные знаки?

15(10). При каком целом значении b один из корней уравнения

$$4x^2-(3b+2)x+(b^2-1)=0$$

втрое меньше другого?

16(8). При каком значении q сумма кубов корней уравнения $x^2-x-q=0$ равна 19?

17(3). Корни x_1, x_2 уравнения $x^2+ax+12=0$ обладают свойством $x_1-x_2=1$. Найдите a.

18. Решите уравнения:

а) (1) $|2x-3|=3-2x$;

б) (10) $x-\sqrt{x}=6$;

в) (1) $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=0{,}5$;

г) (1) $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$;

д) (10) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$;

е) (3) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{\lg 4}{\lg 8}$;

ж) (11) $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$;

з) (1) $\dfrac{3}{2^{1-x}}=4^{x-4}-7$;

и) (1) $\log_3\frac{x+1}{3}=\log_3\frac{x}{2-x}$;

к) (10) $1-\frac{1}{2}\lg(2x-1)=\frac{1}{2}\lg(x-9)$;

л) (3) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$;

м) (7) $\log_2 x+\log_3 x=1$;

н) (6) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$;

о) (2) $1+\log_6\frac{x+3}{x+7}=\frac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$;

п) (3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$;

р) (10) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$;

с) (6) $4^{\log_2\lg x}=\lg x-\lg^2 x+1$.

19 (10). Найдите больший корень уравнения

$$\lg(x+6)-2=\frac{1}{2}\lg(2x-3)-\lg 25.$$

20. Решите тригонометрические уравнения:

а) (7) $\cos 2x+\cos^2 x=0$;

б) (7) $\sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0$;

в) (1) $\cos^2 x-\sin^2 3x=0$;

г) (3) $1-\cos x=\sin x\sin\frac{x}{2}$;

д) (8) $\sin 3x-4\sin x\cdot\cos 2x=0$;

е) (3) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$;

ж) (4) $\sin^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\cos^2 4x$;

з) (2) $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=\dfrac{2\sqrt{3}\cos 2x}{1+\cos 2x}$;

и) (2) $(\sin x+\cos x)^2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

к) (3) $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin x}$;

л) (4) $(\sin 2x+\sin 4x)\operatorname{tg}x=0$;

м) (2) $5\sin x\cdot\operatorname{tg}x-\sin x-5\operatorname{tg}x+1=0$;

н) (8) $3^{1+\sin x}+2\cdot 3^{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=21$.

21. Решите системы уравнений:

а) (2) $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\ x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases}$

б) (6) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3;\end{cases}$

в) (2) $\begin{cases}2\lg\sqrt{x}+2^y+1=0,\\ \lg x^3+4^y-1=0;\end{cases}$

г) (2) $\begin{cases}9^{x-y}+2\cdot 3^{x-y}=\log_2 8,\\ (1-y)\lg 3=\lg(4-3^x);\end{cases}$

д) (7) $\begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{y}=576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4; \end{cases}$

е) (7) $\begin{cases} 7^{x}-3\cdot y=43, \\ 4y+2\cdot 7^{x}=106; \end{cases}$

ж) (6) $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)-\log_5(y-x)= \\ =\log_5(x+y); \end{cases}$

з) (4) $\begin{cases} \cos 2y\sqrt{\sin x}=0, \\ \cos 2y+4\sin^2 x-3=0. \end{cases}$

22. Решите неравенства:

а) (3) $\dfrac{4-3x}{3-2x}<1$;

б) (3) $|x|+|2x+1|-x>1$;

в) (8) $x^2-|5x+8|>0$;

г) (8) $\sqrt{5-x^2}>x-1$;

д) (12) $\sqrt{2x+4}<4$;

е) (1) $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x+7}\geqslant\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x+5}$;

ж) (2) $3\sqrt{6+x-x^2}+2>4x$;

з) (1) $\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2>0$;

и) (1) $\log_2(x-1)+\log_2 x\geqslant 1$;

к) (2) $\dfrac{1}{3^x-1}>\dfrac{1}{1-9^{x-1}}$;

л) (4) $\sqrt{\log_2\dfrac{3-2x}{1-x}}<1$;

м) (4) $\log_2 x-2\log_x 2+1\geqslant 0$;

н) (1) $\dfrac{1}{\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}10}<\lg 2$;

о) (4) $\log_{3x-5}(3x^2+8x+9)>2$.

23(2). Найдите область определения функции

$$y=\lg\left(\frac{x^2+6}{8+2x-x^2}-1\right).$$

24(6). При каких значениях параметра a система

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

удовлетворяется для всех действительных значений x?

25(1). При каких a уравнение

$$\cos^2 ax+\cos x=2(\cos ax+\cos x-1)$$

имеет единственное решение?

Анализ

1(11). Найдите число точек пересечения графиков функций

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}\ \text{ и }\ y=2^x.$$

2(10). Найдите значения функции $y=x^3-3x^2-9x+15$ в точке минимума.

3(11). Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=\operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4(6). Пусть x_1 и x_2 — точки экстремумов функции

$$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-6(a+1)x+2.$$

При каких a выражение $x_1^2+x_2^2$ имеет наименьшее значение?

5(1). Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка минимума и точка максимума функции $y=-2x^3+3(1-2a)x^2+12ax-1$. При каком значении a выполняется $x_1^2=x_2$?

6(8). Найдите экстремальные точки функции

$$y=5|x|-x^2-4.$$

7(12). Найдите точки экстремума функции

$$y=-3\sin(6x+1)+9x.$$

8(1). Проектируется оросительный канал с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции с определенной площадью и высотой. Каким должен быть острый угол трапеции, чтобы для облицовки боковых стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

9(4). Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из оставшейся части круга свернута воронка. При каком значении α вместимость воронки будет наибольшей?

10(11). Найдите больший корень уравнения

$$f'(x)=2,\ \text{если}\ f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2-3x.$$

11(4). В правильной четырехугольной призме длина диагонали равна $\sqrt{3}$; угол, образованный этой диагональю с основанием призмы, равен α. Найдите объем призмы и выясните, при каком значении α объем призмы будет наибольшим.

Геометрия

1(1). В равносторонний треугольник вписана окружность радиусом r. Найдите площадь треугольника.

2(11). Катеты прямоугольного треугольника 12 и 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

3(3). Найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

4(7). В треугольник, в котором известны длины двух сторон a и b, вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол C. Найдите длину стороны ромба.

5(6). Периметр прямоугольного треугольника равен 84, а длина его гипотенузы равна 37. Вычислите площадь этого треугольника.

6(12). В треугольнике заданы две стороны $a=5$ см, $b=4$ см и угол между ними $\alpha=30°$. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

7(1). В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

8(11). Около круга описана равнобочная трапеция, периметр которой равен 80, а острый угол — 30°. Найдите площадь трапеции.

9(7). Большим основанием равнобедренной трапеции является диаметр описанной вокруг нее окружности с радиусом R. Найдите отношение площади круга к площади трапеции, если ее меньшее основание равно a, а угол при большем основании — α.

10(4). В треугольник постоянного периметра $2p$ вписана окружность. К этой окружности проведена касательная, параллельная стороне треугольника. Найдите наибольшую возможную длину отрезка касательной, концы которого принадлежат сторонам треугольника.

11(3). Определите угол ромба, зная его площадь Q и площадь вписанного в него круга S.

12(1). Дана окружность с диаметром KL. Вторая окружность с центром в точке K пересекает первую окружность в точках M и N, а диаметр KL — в точке A. На дуге AN, не содержащей точки M, взята точка B, отличная от точек A и N. Луч LB пересекает первую окружность в точке C. Известно, что $CN = c$, $CM = d$. Найдите BC.

13(2). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектрисы BD и AF пересекаются в точке O. Отношение площади треугольника DOA и площади треугольника BOF равно $\frac{3}{8}$. Докажите, что $AC : AB = 1 : 2$.

14(8). Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно $\sqrt{3}$. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

15(6). Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.

16(6). Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1. Одно из боковых ребер равно 2 и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

17(6). В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол β. Определите объем пирамиды.

18(10). В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна 60. Площади диагональных сечений параллелепипеда равны 72 и 60. Найдите объем параллелепипеда.

19(2). Боковые грани пирамиды, в основании которой равнобедренная трапеция с высотой h, одинаково наклонены к плоскости основания. Из вершины пирамиды опущены перпендикуляры на боковые стороны трапеции и основания их соединены. В полученном треугольном сечении угол при вершине равен α, а площадь сечения равна S. Найдите объем пирамиды.

20(3). Площадь боковой поверхности конуса равна S, а полной поверхности — P. Определите угол между высотой и образующей.

21(2). В цилиндр вписана правильная треугольная пирамида так, что одно из ее боковых ребер есть образующая цилиндра. Найдите объем пирамиды по радиусу R основания цилиндра и двугранному углу α при боковом ребре пирамиды.

Физика

Механика

1(10). Расстояние между точками A и B — $l = 3$ км. Из этих точек навстречу друг другу выезжают два велосипедиста. Скорости их равномерного движения $v_1 = 18$ км/ч и $v_2 = 9$ км/ч. Через какое время (в секундах) они встретятся?

2(4). Автомобиль проехал половину пути со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. Оставшуюся часть пути он половину времени ехал со скоростью $v_2 = 15$ км/ч, а последний участок — со скоростью $v_3 = 45$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

3(9). Тело начало двигаться равноускоренно и в течение пятой секунды от начала движения прошло путь $l = 45$ м. С каким ускорением оно двигалось?

4(11). Тело, покоящееся на высоте $H = 45$ м над поверхностью Земли, начало свободно падать. Какой путь оно пройдет за последнюю секунду своего движения? Результат представьте в единицах СИ. Принять $g = 10$ м/с².

5(5). Тело падает с некоторой высоты H и последнюю часть пути $h = 200$ м проходит за время $\tau = 4$ с. Сколько времени падало тело? Как велика высота H? Сопротивление воздуха не учитывать.

6(2). Вверх по горке, профиль которой показан на рисунке 1, толкнули льдинку, сообщив ей скорость $v_0 = 10$ м/с. На какую максимальную высоту поднимется льдинка? Трением пренебречь.

7(4). В лифте, опускающемся с ускорением $a = 0{,}1$ м/с², падает тело с высоты $h = 1$ м над полом без начальной скорости. Через какой промежуток времени после начала падения тело коснется пола лифта?

8(9). Радиус рабочего колеса гидротурбины в 8 раз больше, а частота вращения в 40 раз меньше, чем у паровой турбины. Чему равно отношение центростремительных ускорений концов лопаток паровой турбины и концов лопастей гидротурбины?

9(9). Автомобиль массой $m = 5$ т трогается с места с ускорением $a = 0{,}6$ м/с². Найдите силу тяги, если сила трения $F_{тр} = 2$ кН. Ответ выразите в килоньютонах (кН).

10(9). При каком ускорении разорвется трос, прочность которого на разрыв $T = 15$ кН, при вертикальном подъеме груза массой $m = 500$ кг?

11(3). По горизонтальной дороге тянут сани с грузом общей массой $m = 80$ кг за веревку, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Сила тяги $F = 250$ Н. Определите коэффициент трения, если ускорение, с которым движутся сани, $a = 0{,}15$ м/с².

12(10). Две гири массой $m_1 = 7$ кг и $m_2 = 11$ кг висят на концах нити, которая перекинута через блок. Гири вначале находятся на одной высоте. Через какое время после начала движения более легкая гиря окажется на $h = 20$ см выше тяжелой? Массой блока и нити, а также трением в блоке пренебречь; нить нерастяжима; $g = 10$ м/с².

13(3). Самолет делает мертвую петлю. Найдите вес летчика в верхней и нижней точках петли, если радиус петли $R = 200$ м, масса летчика $m = 80$ кг, скорость самолета $v = 360$ км/ч.

14(3). Шар массой $m = 0{,}5$ кг, падая с высоты $h_1 = 10$ м, попадает в снег и пробивает в нем яму глубиной $h_2 = 80$ см. Считая движение в воздухе и в снегу равнопеременным

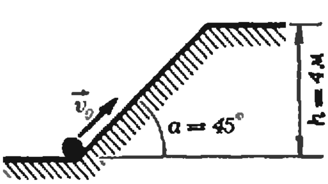


Рис. 1.

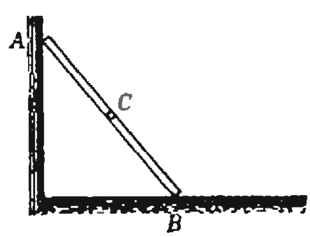


Рис. 2.

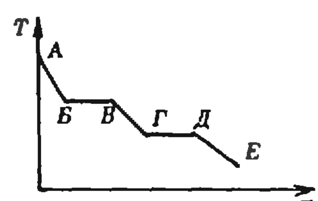


Рис. 3.

и силу сопротивления в воздухе $F_{c1} = 0{,}8$ Н, найдите силу сопротивления в снегу.

15(11). Человек находится на краю круглой горизонтальной платформы радиусом $R = 3$ м. Какое наименьшее число оборотов в минуту должна делать платформа вокруг вертикальной оси, чтобы человек не мог удержаться на ней при коэффициенте трения $\mu = 0{,}2$? Результат округлите до десятых долей. Принять $g = 10$ м/с^2.

16(10). Полый цилиндр плавает в керосине. Чтобы цилиндр плавал с той же осадкой (глубиной погружения) в воде, в него требуется поместить груз массой $m = 100$ кг. Определите массу цилиндра. Плотность керосина $\varrho_к = 800$ кг/м^3, воды $\varrho_в = 1000$ кг/м^3.

17(2). Верхний конец лестницы упирается в гладкую вертикальную стену, а нижний находится на шероховатом полу (рис. 2). При каком наклоне лестница будет находиться в равновесии? Коэффициент трения $\mu = 0{,}5$, центр тяжести лестницы находится в ее середине.

18(9). На чашках рычажных весов стоят два одинаковых сосуда, до краев заполненные водой. В сосуде, стоящем на левой чашке, плавает кусок дерева. В каком положении будут находиться чашки весов? Выберите ответ: 1) левая чашка опущена; 2) правая чашка опущена; 3) весы в равновесии.

19(10). Какую работу совершит сила $F = 20$ Н, подняв по наклонной плоскости груз массой $m = 2$ кг на высоту $h = 2{,}5$ м с ускорением $a = 5$ м/с^2? Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением пренебречь.

20(5). Резиновый мяч массой m и радиусом R погружают в воду на глубину h и отпускают. На какую высоту, считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать. Плотность воды ϱ.

21(11). Пуля массой $m = 8$ г, летящая со скоростью $v_1 = 400$ м/с, пробивает бревно толщиной $d = 20$ см и вылетает из него со скоростью $v_2 = 100$ м/с. Определите среднюю силу сопротивления движению пули в бревне. Результат представьте в килоньютонах (кН).

22(2). Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске застрянет пуля, если ее скорость после прохождения первой доски равна v_1 и $v_0 = 1{,}2v_1$?

23(2). Ядро, летящее со скоростью $v = 20$ м/с, разорвалось на две части с массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг. Скорость меньшей части равна $v_2 = 90$ м/с и направлена так же, как скорость ядра до разрыва. Определите скорость первой части ядра.

24(1). Альфа-частица после столкновения с неподвижным ядром гелия движется в направлении, образующем угол $\beta = 30°$ с первоначальным направлением. Определите угол, под которым разлетаются частицы после столкновения, и отношение их кинетических энергий.

25(12). Направленная горизонтально струя воды из брандспойта бьет в вертикальную стенку. Расход воды $Q = 60$ л/мин. Площадь поперечного сечения струи $S = 1{,}5$ см^2. Определите силу давления струи на стенку, считая удар о стенку абсолютно неупругим. Плотность воды $\varrho = 10^3$ кг/м^3.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1(10). На сколько градусов надо нагреть газ, поддерживая постоянным его объем, чтобы давление увеличилось в два раза по сравнению с давлением при температуре $t = 0$ °С (0 °С $= 273$ К, $\alpha = (1/273)$ К$^{-1}$)?

2(5). Газ, масса которого $m = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг, занимает объем $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3 при температуре $T_1 = 280$ К. При изменении температуры газа при постоянном давлении его плотность стала $\varrho_2 = 0{,}6$ кг/м^3. Определите конечную температуру газа.

3(11). Два сосуда соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде находится $V_1 = 1{,}5$ л азота при давлении $p_1 = 4{,}0$ Па, в другом — $V_2 = 3{,}0$ л кислорода при давлении $p_2 = 2{,}5$ Па. Какое давление установится в сосудах, если открыть кран? Температура газов постоянна. Результат представьте в единицах СИ.

4(3). Вычислите работу, которую совершит газ при изобарическом нагревании от $t_1 = 20$ °С до $t_2 = 100$ °С, если он находится в сосуде с подвижным поршнем. Начальный объем газа $V_1 = 5$ дм^3, давление нормальное атмосферное.

5(3). Один моль кислорода нагревается при постоянном давлении от температуры $t_0 = 0$ °С. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Удельная теплоемкость кислорода при этих условиях $c = 915{,}6$ Дж/(кг·К).

6(2). Один моль идеального газа имел температуру T, затем был охлажден изохорически так, что давление упало в n раз. Далее газ расширялся при постоянном давлении так, что его температура оказалась снова равной T. Какую работу совершил газ?

7(9). Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы получить $m = 5$ кг воды при температуре $t_0 = 0$ °С из льда, взятого при $t = -20$ °С? Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Ответ выразите в мегаджоулях (МДж).

8(5). Чтобы измерить температуру воды, имеющей массу $m = 0{,}05$ кг, в нее погрузили термометр, который показал $t_1 = 80$ °С. Определите начальную температуру воды, если термометр перед погружением в воду показывал температуру помещения $t_2 = 20$ °С. Теплоемкость термометра $C = 3$ Дж/К, удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

9(9). В процессе охлаждения вещество переходит из газообразного состояния в жидкое, а затем — в твердое. Какой участок графика зависимости температуры T вещества от времени τ (рис. 3) соответствует переходу пара в жидкость? Выберите ответ: 1) А — Б; 2) Б — В; 3) В — Г; 4) Г — Д; 5) Д — Е.

10(12). Сосуд с водой нагревают на электроплитке от $t = 20$ °С до кипения за $\tau = 20$ мин. Сколько нужно времени, чтобы при тех же условиях работы плитки 20 % воды обратилось в пар? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(моль·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг.

11(12). Смешали $V_1 = 2$ м^3 воздуха с относительной влажностью $\varphi_1 = 30$ % и $V_2 = 1$ м^3 с относительной влажностью $\varphi_2 = 20$ %. Обе порции были взяты при одинаковых температурах. Смесь занимает объем $V = 3$ м^3. Определите ее относительную влажность.

Основы электродинамики

1(11). В двух лежащих на одной из диагоналей вершинах квадрата со стороной $a = 30$ см расположены одинаковые по модулю и знаку точечные заряды $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Заряды находятся в вакууме. Определите напряженность электрического поля в одной из других вершин квадрата. Результат представьте в вольтах на сантиметр (1 В/см = 100 В/м) и округлите до целого числа. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2(9). Радиус водяной капли $r = 1$ мм. Найдите модуль потенциала капли, если ее заряд образован избыточными электронами в количестве $n = 10^6$. Принять $4\pi\varepsilon_0 = 10^{-10}$ Ф/м.

3(9). Проводники, заряженные одинаковыми зарядами, имеют потенциалы $\varphi_1 = 40$ В и $\varphi_2 = 60$ В. Каким будет потенциал этих проводников, если их соединить проволокой?

4(9). Два проводящих шара радиусами $R_1 = 8$ см и $R_2 = 20$ см находятся на большом расстоянии друг от друга и имеют заряды $q_1 = +14 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -7 \cdot 10^{-9}$ Кл. Каким станет заряд второго шара, если шары соединить проводником? Ответ выразите в нанокулонах (нКл).

5(4). Два одинаковых металлических шарика, имеющие положительные заряды $q_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл, расположены на расстоянии $l = 30$ см друг от друга, значительно большем их диаметра. Изменится ли сила взаимодействия между шариками после того, как они будут на короткое время соединены проводником? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

6(10). Электрическое поле переместило частицу с зарядом $q = 0{,}2$ Кл из точки A с потенциалом $\varphi_A = 600$ В в точку B, потенциал которой неизвестен. При этом кинетическая энергия частицы изменилась на $\Delta W = 100$ Дж. Определите потенциал точки B.

7(10). Маленький шарик массой $m = 0{,}2$ г, имеющий заряд $q = 10^{-6}$ Кл, скользит с высоты $h = 3$ м по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 36{,}5°$. В вершине прямого угла, образованного высотой h и горизонтом, находится неподвижный точечный заряд $Q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл. Определите скорость шарика у основания наклонной плоскости, если начальная скорость шарика равна нулю. Трением пренебречь.

8(2). Найдите заряд конденсатора в схеме, приведенной на рисунке 4.

9(10). Какое сопротивление R_x надо включить между точками A и B (рис. 5), чтобы сопротивление всей цепи было равно $R = 10$ Ом, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 3$ Ом?

10(1). Напряжение между точками B и A (рис. 6) равно $U_1 = 120$ В. Определите отношение сопротивлений R_1/R_2, если $R_3/R_4 = 2$, а разность потенциалов между точками C и D равна $U_2 = 20$ В.

11(5). Через аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом и электродвижущей силой $\mathscr{E} = 12$ В течет ток силой $I = 1$ А. Чему будет равна разность потенциалов на клеммах аккумулятора, если сопротивление внешней цепи увеличить на $\Delta R = 8$ Ом?

12(9). Батарея аккумуляторов с внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом питает десять параллельно соединенных ламп сопротивлением $R = 250$ Ом каждая. Определите ЭДС батареи, если ток в каждой лампе $I = 0{,}5$ А.

13(2). Некоторая цепь с сопротивлением R питается от батареи, составленной из N одинаковых элементов. При каком значении внутреннего сопротивления элемента сила тока в цепи будет одинаковой при соединении этих элементов в батарею последовательно и параллельно?

14(3). Источник тока замыкается проволокой: один раз с сопротивлением $R_1 = 4$ Ом, а другой — $R_2 = 9$ Ом. В обоих случаях количество теплоты, выделяющееся в проволоках за одно и то же время, оказывается одинаковым. Каково внутреннее сопротивление источника?

15(11). Подъемный кран равномерно поднимает груз массой $m = 8{,}8$ т на высоту $h = 10$ м в течение $t = 49$ с. Определите силу тока, потребляемую краном, если напряжение $U = 220$ В, а КПД крана $\eta = 80\,\%$. Результат представьте в единицах СИ. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

16(11). В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл кусок провода длиной $l = 2$ м и сопротивлением $R = 1$ Ом складывают вдвое и концы соединяют. Затем провод растягивают в квадрат так, что плоскость квадрата перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Какой заряд протекает при этом через сечение проводника? Результат представьте в микрокулонах (1 мкКл = 10^{-6} Кл).

17(10). Под влиянием однородного магнитного поля в нем движется с ускорением $a = 2$ м/с^2 прямолинейный проводник поперечным сечением $S = 1$ мм^2. Направление проводника перпендикулярно линиям индукции, и по проводнику течет ток $I = 1$ А. Плотность материала проводника $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определите индукцию магнитного поля.

18(12). Прямоугольная рамка из проводника с сопротивлением $R = 1$ Ом, двигаясь поступательно с постоянной скоростью $v = 4$ м/с, пересекает полосу однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}5$ Тл. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рамки. Стороны рамки $l_1 = 10$ см, $l_2 = 5$ см, ширина полосы $l_3 > l_2$, рамка движется вдоль стороны l_2. Определите количество теплоты, которое выделится в рамке к моменту, когда она пересечет полосу.

Колебания и волны

1(3). Два маятника одновременно начинают колебаться. За один и тот же промежуток времени первый делает $n_1 = 20$, а второй — $n_2 = 10$ колебаний. Определите отношение длин этих маятников.

2(1). Математический маятник длиной $l = 1$ м отклонили на угол α_0 ($\alpha_0 \ll 1$) и отпустили с нулевой начальной скоростью. Через

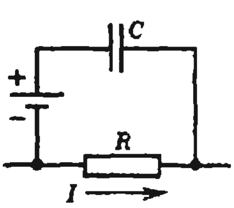


Рис. 4.

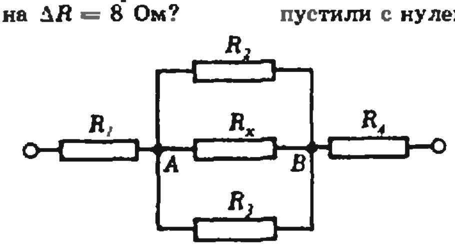


Рис. 5.

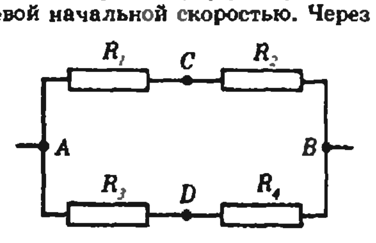


Рис. 6.

какое минимальное время угол отклонения маятника станет равным $\alpha_0/2$? Ускорение силы тяжести считать равным $g = 10$ м/с^2.

3(11). Лифт движется по вертикали вверх вначале с ускорением $a_1 = 6$ м/с^2 в течение времени $t_1 = 5$ с, затем с ускорением $a_2 = -6$ м/с^2 в течение времени $t_2 = 10$ с. В лифте находится математический маятник длиной $l = 0{,}25$ м. Сколько колебаний совершит маятник за время движения лифта? Принять $g = 10$ м/с^2. Результат округлите до целого числа.

4(4). Заряженный шарик прыгает в поле плоского конденсатора на тонкой изолирующей подложке. Обкладки конденсатора расположены горизонтально. Масса шарика $m = 10^{-3}$ кг, его заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Максимальная скорость шарика $v = 0{,}8$ м/с, высота подъема $h = 5$ см. Определите разность потенциалов между наивысшей и наинизшей точками траектории шарика.

5(5). Колебательный контур настроен на частоту $\nu = 1{,}5 \cdot 10^7$ Гц. Как надо изменить емкость конденсатора для перестройки контура на длину волны $\lambda = 40$ м? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

6(10). Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10^{-3}$ Гн и конденсатора емкостью $C = 10^{-5}$ Ф. Конденсатор заряжен до максимального напряжения $U_m = 100$ В. Определите максимальную силу тока в контуре при свободных колебаниях в нем.

7(11). Скорость звука в воде $v = 1450$ м/с. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 725$ Гц? Результат представьте в единицах СИ.

8(12). Емкость конденсатора переменной емкости в контуре радиоприемника изменяется в пределах от C до $9C$. Определите диапазон длин волн контура радиоприемника, если емкости C конденсатора соответствует длина волны, равная 3 м.

Оптика

1(2). Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $\gamma = 30°$ к границе. Показатель преломления первой среды $n_1 = 2{,}4$. Определите показатель преломления второй среды, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

2(11). Аквалангист, находящийся под водой, видит Солнце под углом $\gamma = 52°$ к горизонту. Определите угол падения лучей солнечного света на поверхность воды. Результат представьте в градусах и округлите до целого числа. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

3(11). Пучок параллельных лучей падает на толстую стеклянную пластину под углом $\alpha = 60°$ и, преломляясь, переходит в стекло. Ширина пучка в воздухе $a = 10$ см. Определите ширину пучка в стекле. Результат представьте в сантиметрах (см) и округлите до десятых долей. Показатель преломления стекла $n = 1{,}51$.

4(10). Предмет находится на расстоянии $d = 0{,}25$ м от двояковыпуклой линзы. Изображение получается действительным, обратным, увеличенным. Высота изображения в $\Gamma = 4$ раза больше высоты предмета. Определите фокусное расстояние линзы.

5(3). На каком расстоянии от выпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 60$ см следует поместить предмет, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в $\Gamma = 2$ раза?

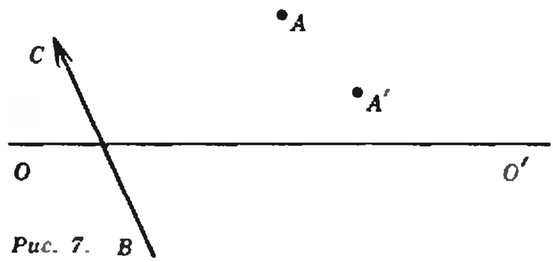


Рис. 7.

6(5). Собирающая линза дает действительное изображение с увеличением $\Gamma = 2$ раза. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением $f = 0{,}3$ м.

7(4). Две линзы с одинаковыми фокусными расстояниями находятся на одной оси на расстоянии $l = 1$ м друг от друга. Изображение предмета, помещенного на расстоянии $d = 1$ м от одной линзы, получилось на таком же расстоянии от другой линзы. Найдите фокусное расстояние линз.

8(1). На рисунке 7 показаны положения главной оптической оси OO' линзы, точечного источника A и его изображения A' в линзе. Постройте изображение предмета BC, определив, собирающей или рассеивающей является линза, а также ее положение.

9(11). Атом ртути, получив при соударении с электроном энергию $W = 7{,}84 \cdot 10^{-19}$ Дж, излучает квант света. Определите частоту излучения. Результат представьте в петагерцах (1 ПГц = 10^{15} Гц) и округлите до сотых долей. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

10(5). Определите работу выхода электрона из металла при внешнем фотоэффекте, если при освещении металла светом с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м фотоэлектроны приобретают скорость $v = 10^6$ м/с ($m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с).

11(1). При увеличении частоты падающего на металл света в α раз задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в β раз. Считая частоту ν падающего света известной, определите по этим данным «красную» границу для металла.

12(1). Масса ядра $^{16}_{8}O$ равна $m_1 = 16{,}00$ а. е. м. Определите его дефект масс и энергию связи, если известно, что масса ядра $^{4}_{2}He$ равна $m_2 = 4{,}00$ а. е. м., а его дефект масс $\Delta m_2 = 0{,}03$ а. е. м. (Дефект масс $\Delta m = 1$ а. е. м. соответствует энергии связи $E_{св} = 931$ МэВ.)

13(11). Третий блок Белоярской атомной электростанции им. И. В. Курчатова имеет электрическую мощность $P = 6 \cdot 10^8$ Вт при КПД $\eta = 40$ %. Определите массу урана $^{235}_{92}U$, расходуемого в течение суток, если известно, что при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, в среднем равная $w = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж. Результат представьте в единицах СИ и округлите до сотых долей. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

14(12). Какая минимальная энергия (в МэВ) необходима для расщепления ядра изотопа лития $^{7}_{3}Li$ на протоны и нейтроны? Массы $^{7}_{3}Li$, $^{1}_{1}p$, $^{1}_{0}n$ соответственно равны $m_1 = 7{,}01601$ а. е. м., $m_2 = 1{,}00783$ а. е. м., $m_3 = 1{,}00866$ а. е. м. Массе $m_0 = 1$ а. е. м. соответствует энергия $E_0 = 931$ МэВ.

Публикацию подготовили
А. А. Егоров, В. А. Тихомирова

Информация

VIII Московская олимпиада по программированию

Московскую городскую олимпиаду по программированию для школьников провели 1 февраля 1987 Учебно-производственный центр с институтами ИНЭУМ Минприбора и ИПИ АН СССР. В ней приняло участие 320 учеников из 21 района г. Москвы. Ниже приводятся задачи этой олимпиады. (Участникам предлагалось выбрать и решить только две задачи.)

1. Рюкзак. *Из заданных n предметов выбрать такие, чтобы их суммарный вес был менее 30 кг, а стоимость — наибольшей. Напечатать суммарную стоимость выбранных предметов.*

Точнее. Задано число $n<100$ и два массива положительных чисел $A[1:n]$, $B[1:n]$. Выбрать такие попарно различные числа $i_1, i_2, ..., i_k$, чтобы

$$A[i_1]+A[i_2]+...+A[i_k]<30,$$

а

$$B[i_1]+B[i_2]+...+B[i_k]=\max.$$

Напечатать только величину max.

2. Полукратные. *Множество чисел A задано условиями:*

а) $1\in A$,

б) *если $k\in A$, то $2*k+1\in A$ и $3*k+1\in A$, и других чисел множество A не содержит.*

Напечатать первые $n<1000$ чисел множества A в порядке возрастания.

Вот начало этой распечатки: 1, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 15, 19, ...

3. Пары кубов. *Каким числом способов заданное натуральное число n представляется суммой двух кубов натуральных чисел:*

$$n=i^3+j^3?$$

Перестановка слагаемых нового способа не дает. Программой извлечения корня пользоваться не следует.

4. Перевертыши. *Заданы число $n<1000$ и числовой массив $A[1:n]$. Найти отрезок массива максимальной длины, в котором первое число равно последнему, второе — предпоследнему, и т. д. Напечатать длину этого отрезка.*

5. Индексы порядка. *Задано число $n<1000$ и числовой массив $A[1:n]$. Найти и отпечатать такую последовательность всех его индексов*

$$i_1, i_2, ..., i_n,$$

в которой элементы массива не убывают:

$$A[i_1]\leqslant A[i_2]\leqslant ...\leqslant A[i_n].$$

Пояснения.

а) Через $A[1:n]$ обозначается массив чисел A_1, $A_2, ..., A_n$; через $A[i]$ — его элемент.

б) Числа, задающие число элементов массива или обозначающие индексы элементов, — натуральные. Все остальные числа — с плавающей точкой (если не сказано иначе).

в) Все заданные числа и массивы следует в решениях вводить извне и печатать, а найденные ответы выводить на печать.

г) В задаче 1 можете предполагать, что предметы уже расположены в порядке возрастания или убывания веса $A[i]$, стоимости $B[i]$, цены $B[i]/A[i]$, или какого-либо иного признака.

д) Хорошие решения должны укладываться в задаче 2 в n действий, в задаче 3 — в $\sqrt[3]{n}$ действий, в задачах 4 и 5 — в n^2 действий (с точностью до постоянного множителя).

А. Л. Брудно

Летняя школа «Юный программист»

Два с половиной года назад в г. Переславле-Залесском, на берегу Плещеева озера появился Институт программных систем АН СССР. Институт очень молод, средний возраст сотрудников — 27 лет, желания работать, энергии и энтузиазма им не занимать. Не случайно поэтому с первых дней существования института начались работы по пропаганде компьютерной грамотности. В одной из школ г. Переславля был оборудован класс ПЭВМ «Правец», в котором стали проводиться занятия групп УПК и факультативы по курсу информатики. В январе 1986 года в зимние каникулы прошли занятия в лагере «Юный программист». Накопленный опыт и был использован летом 1986 года при проведении Школы «Юный программист».

Главной целью, стоявшей перед организаторами Школы, являлось ознакомление детей с современными ПЭВМ. Для преподавателей было важно создать у школьников представление о возможностях компьютеров, продемонстрировать стили профессиональной работы с ним и, по возможности, предотвратить возникновение как компьютеромании, так и компьютерофобии. Решению последней задачи, в частности, служило и оформление Школы: яркие рисунки и указатели в аудиториях и на зданиях иллюстрировали тему «Дружелюбный компьютер».

5 августа при участии вице-президента АН СССР академика Е. П. Велихова состоялось торжественное открытие Школы. Три недели 80 мальчишек и девчонок учились и отдыхали в живописном местечке «Ботик» на берегу Плещеева озера. Они собрались из разных уголков страны — из Москвы и Горького, Литвы и Белоруссии, были здесь и юные переславцы.

Работа Школы была построена следующим образом. Школьники 1—6 классов составили отдельный поток и занимались на компьютерах Tandy TRS-80 Color Computer 2. Главная тема занятий — компьютерная графика. Программирование велось на языке Бейсик. Остальные учащиеся были разбиты на группы по 5—10 человек, к каждой из групп были прикреплены преподаватели-кураторы. Они проводили практические занятия по одной или нескольким темам, таким, как компьютерная графика, музыка, язык ЛИСП, архитектура ЭВМ, электронные таблицы. Программирование велось на языке Паскаль на ПЭВМ «Правец».

Помимо практических занятий велись и теоретические: школьникам был прочитан курс лекций по языку программирования Паскаль, читались также небольшие курсы по математической логике, теории чисел, языку логического программирования Пролог.

Велико было желание участников Школы успеть все увидеть и узнать! Ни солнечная погода, ни близость озера не могли оторвать школьников от компьютеров. На научной конференции, состоявшейся перед закрытием Школы, ребята рассказали о наиболее интересных своих работах. Младшие школьники продемонстрировали на компьютерах свои программы-мультфильмы «Лето кота Леопольда», «Про кота и песика» и др.

Но не только учебным занятиям были посвящены дни, проведенные ребятами в Школе. Спортивные соревнования и КВН, экскурсия в Ростов-Великий и встреча с редакцией журнала «Юный техник», турниры по «бою в памяти», посвящение в юные программисты и прощальный вечер надолго останутся в памяти школьников и их старших товарищей. В. П. Руденко, Л. А. Гайдар, Е. В. Грязнова, М. В. Нестерова, С. В. Дужин и др.— каждый из 20 преподавателей, работавших в Школе, старался передать детям не только знания, но и частицу своей души.

С 1987 года в г. Переславле-Залесском будет работать ежегодная региональная Школа юных программистов. Впереди у сотрудников ИПС АН СССР большая работа. Пожелаем им успехов.

С. М. Гукова,
А. К. Волков

Итоги шахматного конкурса 1986 года

Шахматный конкурс 1986 года неожиданно побил все рекорды — в редакцию поступило более 3000 писем на первые же задания. Видно, после матчей на первенство мира между Каспаровым и Карповым интерес к шахматам возрос, и среди читателей «Кванта» появилось больше шахматистов. По мере движения конкурса задания усложнялись и число его участников, конечно, сокращалось. Но все же сотни читателей выдержали испытание до конца! Первоначально планировалось присуждать за лучшие решения II и I разряд, однако, как выяснилось, большинство решивших правильно более 16 заданий уже имеют второй разряд, а то и первый. Поэтому решено всем 40 победителям конкурса присвоить I разряд (некоторым из них вторично!).

Среди участников конкурса немало таких, чьи конверты можно даже не вскрывать — решения почти наверняка правильные. Это такие опытные решатели как А. Рябов, И. Кваша, В. Медведев, В. Москаленко, М. Германов, Д. Красиков, А. Бойко и др. Они неоднократно побеждали в конкурсе, соответственно получали и дипломы журнала, и призы, и первый разряд. На сей раз в состав победителей мы включили тех участников, которые не так избалованы славой.

Итак, вот 40 победителей конкурса: В. Алферов (Кемерово), М. Андрухив (Донецк), Х. Анимица (с. Кременевка Донецкой обл.), Д. Борисенко (Москва), С. Булатов (с. Раменье Московской обл.), Ю. Великанов (Горький), В. Гасников (Калининград Московской обл.), О. Глауберман (Донецк), А. Гончаренко (Иваново), М. Гумберидзе (с. Мукеди ГССР), А. Давыдов (с. Елфимово Горьковской обл.), А. Жолковер (Люберцы), В. Иванов (Тула), С. Катаргин (Омутнинск), М. Куперман (Москва), Я. Лавренюк (Киев), Ю. Литвиненко (Одесса), Н. Лобжанидзе (Тбилиси), Р. Малык (Ворошиловград), И. Мамедов (Ханлык АзССР, А. Мельников (Москва), В. Моисеев (Москва), Д. Моисеев (Москва), А. Молчанов (Жданов), Э. Мусажаров (Караганда), В. и Т. Оджагвердневы (Белокан), Д. Попадиус (Невинномысск), И. Потехин (Москва), В. Пшеничный (Демянск), В. Расторгуев (Москва), И. Савченко (Ленинград), А. Сергушев (Минск), М. Сидоренко (Калининград Московской обл.), С. Тасмуратов (Астрахань), Р. Торговицкий (Москва), В. Чебкасов (Куйбышев), А. Чернявский (Москва), Е. Чуглазова (Зарафшан), Н. Язданов (дер. Кильчирово Баш. АССР), В. Якубовский (пос. Садовый Владимирской обл.). Вместе с поздравлениями от редакции мы посылаем им дипломы и значки журнала, шахматную литературу с автографами А. Карпова и Е. Гика и документ о присвоении I разряда.

Ответы, указания, решения

Построения одним циркулем

1. Окружность S_1 (за вычетом точки O) есть геометрическое место точек, симметричных относительно окружности S точкам прямой AB; окружность S_2 — геометрическое место точек, симметричных относительно окружности S точкам прямой CD. Поэтому точка P симметрична относительно окружности S как точке прямой AB, так и точке прямой CD, т. е. P' — общая точка прямых AB и CD. Заметим, что прямые AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда окружности S_1 и S_2 имеют единственную общую точку O, т. е. касаются в точке O, и прямые AB и CD совпадают тогда и только тогда, когда совпадают окружности S_1 и S_2.

2. См. решение задач 6 и 4.

3. Сторону, равную радиусу окружности, имеет вписанный в нее правильный шестиугольник. Поэтому A и C — противоположные вершины вписанного правильного шестиугольника, т. е. диаметрально противоположные точки окружности. Значит, AC — диаметр, т. е. точка C лежит на луче AB, и $AC=2AB$.

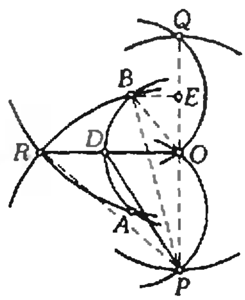


Рис. 1.

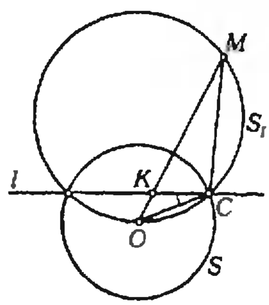


Рис. 2.

4. Обозначим через D середину дуги AB и через E середину отрезка OQ (рис. 1). Мы должны доказать, что $PD=OR$. Заметим, что $RO\perp PQ$, $BE\perp OQ$, точка D лежит на RO, точка O лежит на PQ и $OB=OD$, $PR=PB$, и воспользуемся теоремой Пифагора:

$$OR^2=PR^2-PO^2=PB^2-PO^2=(PE^2+BE^2)-$$
$$-PO^2=PE^2+OB^2-OE^2-PO^2=$$
$$=\frac{9}{4}PO^2+OB^2-\frac{1}{4}PO^2-PO^2=PO^2+OB^2=$$
$$=PO^2+OB^2=PO^2+OD^2=PD^2.$$

5. Очевидно, точка P' лежит на прямой OP (вся картина симметрична относительно прямой OP). Треугольники ORP' и OPR — равнобедренные и имеют общий угол при основании; значит, они подобны и $OP':OR=OR:OP$, т. е. $OP\cdot OP'=OR^2$.

6. Будем строить точку, симметричную точке P' относительно окружности S, по способу задачи 5. Должна получиться точка P. Значит, точки O и P симметричны относительно прямой, проходящей через точки пересечения окружности S с окружностью с центром P', проходящей через O. Но точки O и P симметричны относительно прямой AB. Значит, эти прямые совпадают.

Покажем, что окружность S_1, проходящая через точку O и точки пересечения окружности S с некоторой прямой l (рис. 2), состоит из точек, симметричных точкам прямой l относительно окружности S. Возьмем на прямой l точку K и обозначим через M точку пересечения луча OK с окружностью S_1. Пусть C — одна из точек пересечения окружности S с прямой l (и с окружностью S_1). Треугольники OKC и OCM подобны (углы O у них одинаковы, углы OMC и OCK равны, поскольку они опираются на равные дуги окружности S_1. Значит, $OK:OC=OC:OM$, т. е. $OK\cdot OM=OC^2$. (Если точка K лежит вне окружности S, чертеж меняется, но рассуждение остается точно таким же.)

Задачи на газовые смеси

1. $p=(1+\alpha)\frac{m}{M}\frac{RT}{V}=1{,}94\cdot10^5$ Па, где $M=28$ г/моль — молярная масса азота.

2. $m_1=\frac{M_1M_2}{M_2-M_1}\left(\frac{pV}{RT}-\frac{m}{M_2}\right)=13{,}1$ г, $m_2=m-m_1=46{,}9$ г, $m_3=2m_2M_3/M_2=52{,}8$ г, где m_1, m_2, m_3, $M_1=2$ г/моль, $M_2=32$ г/моль, $M_3=18$ г/моль — массы и молярные массы водорода, кислорода и воды соответственно.

3. $V_2/V_1=3$.

Калейдоскоп «Кванта»

Головоломки

1. Пусть $x_1>x_2$; тогда $y_1<y_2$. Поскольку $S_2=S_3$, т. е. $x_2y_2=x_3y_2$, мы получаем, что $x_2>x_3$. Тогда $y_2<y_3$. Опять из равенства $x_4y_3=x_3y_2$ получаем $x_3>x_4$; тогда $y_3<y_4$. Снова, поскольку $x_1y_4=x_4y_3$, получаем $x_4>x_1$ — противоречие с цепочкой неравенств $x_1>x_2>x_3>x_4$.

2. $\frac{a}{6}\sqrt{3\pi\sqrt{3}}$. Указание. Рассмотрите шесть одинаковых правильных треугольников, составляющих правильный шестиугольник. Теперь ясно, что искомая кривая является шестой частью окружности, делящей пополам площадь этого правильного шестиугольника.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1986 году

Математика

Алгебра

1. $30<v<33{,}6$. 2. 10 ч., 15 ч. 3. 14. Указание. Пусть N — число членов бригады. Из условия следует, что существует целое число k такое, что $\frac{65}{1000}N<k<\frac{75}{1000}N$. При $k=1$ получим $\frac{1000}{75}<N<\frac{1000}{65}$, т. е. $13\frac{1}{3}<N<15\frac{5}{13}$. Наименьшее $N=14$.

4. 18 км/ч. 5. 3. 6. 15 кг. 7. 150 г, 450 г. 8. 160 г, 20 %. 9. 2; 3. 10. 4, 12, 36, 108 или 108, 36, 12, 4. 11. а) 0; б) 27; в) 1; г) 1; д) $\sqrt{3}/4$; е) $-3/5$; ж) a^2-1; з) 4. 12. а) -1; б) $2/a+b$; 1; в) $\mathrm{ctg}^2(\alpha/2)$; г) 1; д) 2. 14. $a\in(-\infty;\ -1)\cup(0;\ \infty)$. 15. 2. 16. 6. 17. $a=\pm7$.

18. а) $(-\infty;\ 3/2]$; б) $\{9\}$; в) $\left\{1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right\}$; г) $\{1+\sqrt{a^2+4a+8};\ 1-\sqrt{a^2-2a+5}\}$ при $a<-2$; $\{1-\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $-2\leqslant a<-1/2$; $\{-3/2\}$ при $a=-1/2$; $\{1-\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $-1/2<a\leqslant1$; $\{1+\sqrt{a^2-2a+5};\ 1-\sqrt{a^2+4a+8}\}$ при $a>1$; единственный корень при $a=-1/2$. Указание. При $x>3$ левая часть уравнения равна $(x-3)(x+1)+3\sqrt{(x+1)(x-3)}$; при $x<3$ она равна $(x-3)(x+1)-3\sqrt{(x-3)(x+1)}$. Выполните замену $y=\sqrt{(x+1)(x-3)}$.
д) $\{1\}$; е) 2; ж) $\{3\}$; з) $\{4+\log_2 7\}$; и) $\{\sqrt{3}-1\}$; к) $\{13\}$; л) $\{2^{-\sqrt{2}};\ 2^{\sqrt{2}}\}$; м) $\{2^{\log 6}\}$; н) $[1/9;\ 9]$; о) $\{-11;\ -1{,}5\}$; п) $\{3\}$; р) $\{37\}$; с) $\{10\}$. 19. $\{14\}$.

20. а) $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos(-1/3)$ $(k\in Z)$;
б) $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(6l\pm1)$ $(k, l\in Z)$;
в) $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2l+1)$ $(k, l\in Z)$;
г) $x=2\pi n$ $(n\in Z)$;
д) $x_1=\pi k$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+l\pi$ $(k, l\in Z)$;
е) $x=\frac{\pi}{2}(3k\pm1)$ $(k\in Z)$;
ж) $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $x_2=\pi l/2$ $(k, l\in Z)$;
з) $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{6}(6l+1)$ $(k, l\in Z)$;
и) $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4l-1)$ $(k, l\in Z)$;
к) $x_1=2\pi k$; $x_2=2\,\mathrm{arctg}\,2+2\pi l$ $(k, l\in Z)$;
л) $x=\pi k/3$ $(k\in Z)$; м) $x=\mathrm{arctg}\,1/5+\pi k$ $(k\in Z)$;
н) $x=\pi k$ $(k\in Z)$. 21. а) $\{(2;\ 1);\ (-2;\ -1)\}$;
б) $\{(1;\ 2);\ (16;\ -28)\}$; в) $\{(10^{-3};\ 2)\}$;
г) $\{(0;\ 0);\ (1;\ 1)\}$; д) $\{(2;\ 6)\}$; е) $\{2;\ 2\}$;

ж) $\{(16;\ 20)\}$; з) $\left\{\left(\frac{\pi}{3}(3k+1);\ \frac{\pi}{4}(2l+1)\right)\right\}$ $(k, l\in Z)$.

22. а) $(1;\ 3/2)$; б) $(-\infty;\ -1/2)\cup(0;\ \infty)$;
в) $\left(-\infty;\ \frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{57}}{2};\ \infty\right)$;
г) $[-\sqrt{5};\ -2)$; д) $[-2;\ 6)$; е) $[-3;\ 2]\cup\{4\}$;
ж) $[-2;\ 2)$; з) $\left(-\infty;\ \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right]\cup(3;\ \infty)$;
и) $(2;\ \infty)$; к) $\left(0;\ \log_3\frac{3\sqrt{17}-9}{2}\right)\cup(1;\ \infty)$;
л) $[2;\ \infty)$; м) $[1/4;\ 1)\cup(2;\ \infty)$;
н) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0{,}5)\cup(0{,}5;\ 5-3\sqrt{2})\cup$ $\cup(5+3\sqrt{2};\ \infty)$; о) $(-4/3;\ -1)$.

23. $\left(-2;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 4\right)$.

24. $a\in(-1;\ 2)$. 25. При любом иррациональном a. **Указание.** Если $a=p/q$, $p\in Z$, $q\in N$, — рациональное число, то уравнению удовлетворяют все $x=2\pi qk$ при $k\in Z$. Если же a иррационально, то $x=0$ является единственным корнем уравнения.

Анализ

1. 1. 2. -12. 3. 2. 4. $a=1$. 5. $a=1/2$.
6. $x=0$ — точка минимума; $x=\pm 5/2$ — точки максимума.
7. Точки минимума $x=-\frac{1}{6}-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$ $(k\in Z)$; точки максимума $x=-\frac{1}{6}+\frac{\pi}{18}+\frac{l\pi}{3}$ $(l\in Z)$.
8. $60°$. **Указание.** Пусть S — площадь поперечного сечения, h — высота трапеции (глубина канала), a — длина нижнего основания (рис. 3). Площадь боковых стенок и дна канала пропорциональна сумме $2a+b=\frac{S}{h}+$ $+h\left(\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$. Осталось исследовать на минимум функцию $f(\alpha)=\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
9. $\alpha_{\max}=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **Указание.** Пусть R — радиус данного круга. Длина дуги сектора с центральным углом α равна αR, поэтому радиус основания воронки равен $r=\frac{\alpha R}{2\pi}$. Высота воронки равна $\sqrt{R^2-\frac{\alpha^2R^2}{(2\pi)^2}}$, а ее объем $V(\alpha)=\frac{1}{6}\pi R^3\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$. Осталось исследовать на экстремум функцию $f(\alpha)=$ $=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$ при $0<\alpha<2\pi$. Для этого достаточно исследовать функцию $f(\alpha)=g(t)=$ $=t^2(1-t)$, где $t=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2$, $0<t<1$.
10. 5. 11. $V(\alpha)=\frac{1}{2}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; $\max V(\alpha)=$ $=\frac{\sqrt{3}}{9}d^3=V(\arcsin 1/\sqrt{3})$.

Геометрия

1. $3r^2\sqrt{3}$. 2. 2. 3. $3a^2(7-4\sqrt{3})$. 4. $\frac{ab}{a+b}$. 5. 210.
6. $r=10/(9+\sqrt{41-20\sqrt{3}})$. 7. $\frac{1}{2}(p-q)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

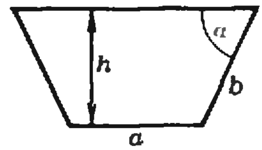


Рис. 3.

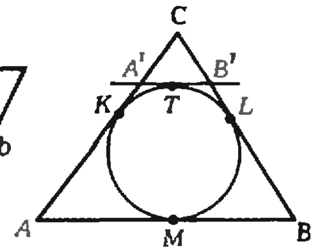


Рис. 4.

8. 200. 9. $\frac{4\pi R^2\operatorname{ctg}\alpha}{4R^2-a^2}=\pi\operatorname{ctg}\alpha/\sin^2 2\alpha$.
10. $p/4$. **Указание.** Пусть ABC — треугольник периметра $2p$ со стороной $AB=c$ (рис. 4), отрезок $A'B'$ параллелен AB, касается вписанной окружности и $A'B'=x$. Из подобия треугольников $A'B'C$ и ABC следует, что $\frac{P_{A'B'C}}{P_{ABC}}=\frac{x}{c}$. С другой стороны,
$$P_{A'B'C}=CA'+A'T+TB'+B'C=$$
$$=CA'+A'K+B'L+B'C=CK+CL=$$
$$=AC-AM+BC-BM=AC+BC-AB=$$
$$=2p-2c.$$
Поэтому $\frac{p-c}{p}=\frac{x}{c}$, откуда $x=\frac{1}{p}c(p-c)$. Функция $f(c)=c(p-c)$ достигает максимума при $c=\frac{p}{2}$.
11. $\arcsin\frac{4S}{\pi Q}$. 12. $\sqrt{cd}$. **Указание.** Докажите подобие треугольников MCB и BNC.
13. **Указание.** Можно считать, что $S_{ABC}=1$. Пусть $S_{AOD}=3u$, $S_{BOF}=8u$. Тогда, по свойству биссектрисы угла треугольника, получим соотношение
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{FC}=\frac{S_{ABF}}{S_{AFC}}=\frac{\frac{1}{2}+5u}{\frac{1}{2}-5u}.$$
Аналогично, $\frac{AD}{AB}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\frac{\frac{1}{2}-3u}{3u}$. Получаем уравнение $\frac{1+10u}{1-10u}=\frac{1-6u}{12u}$, откуда $u=\frac{1}{30}$ и $AB=2AC$.
14. $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$. 15. $a^3/\sqrt{2}$. 16. $\sqrt[3]{2}$.
17. $\frac{1}{2u}\frac{c^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$. 18. 360.
19. $\frac{h^3}{12\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4-\frac{h^2\sin\alpha}{2S}}$.
20. $\arcsin\left(\frac{P}{S}-1\right)$.
21. $\frac{R^3\sin^4\alpha}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-2\cos\alpha}}$ $\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Физика

Механика

1. $t=\ /(v_1+v_2)=400$ с.
2. $v_{ср}=2v_1(v_2+v_3)/(2v_1+v_2+v_3)=40$ км/ч.
3. $a=l/(4{,}5\tau)=10$ м/с^2 (здесь $\tau=1$ с).

4. $l=\sqrt{2gH}\,\tau-g\tau^2/2=25$ м (здесь $\tau=1$ с).
5. $t=\tau/2+h/(g\tau)=7$ с; $H=gt^2/2=245$ м.
6. $H_{max}=h\cos^2\alpha+(v_0^2\sin^2\alpha)/(2g)=4{,}5$ м (здесь $h=4$ м).
7. $t=\sqrt{2h/(g-a)}=0{,}45$ с.
8. $a_2/a_1=200$.
9. $F_т=ma+F_{тр}=5$ кН.
10. $a=T/m-g=20$ м/с^2.
11. $\mu=(F\cos\alpha-ma)/(mg-F\sin\alpha)=0{,}3$.
12. $t=\sqrt{h(m_1+m_2)/(g(m_2-m_1))}=0{,}3$ с.
13. $P_в=m(v^2/R-g)=3{,}2$ кН; $P_н=m(v^2/R+g)=4{,}8$ кН.
14. $F_{c2}=(mg(h_1+h_2)-F_{c1}h_1)/h_2=57{,}5$ Н.
15. $n=60\sqrt{\mu g/(4\pi^2R)}=7{,}8$ мин$^{-1}$.
16. $M=m\varrho_к/(\varrho_в-\varrho_к)=400$ кг.
17. $\alpha\geqslant \mathrm{arctg}\,(1/(2\mu))=\pi/4$.
18. Правильный ответ 2).
19. $A=Fmgh/(F-ma)=100$ Дж.
20. $H=h(4/3\pi R^3\varrho-m)/m$.

21. $F_c=m(v_1^2-v_2^2)/(2d)=3$ кН.
22. Пуля застрянет в 4-й доске.
23. $v_1=((m_1+m_2)v-m_2v_2)/m_1=-15$ м/с.
24. $\gamma=\pi/2$; $E_\alpha/E_н=3$.
25. $F=\varrho Q^2/S=6{,}7$ Н.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $\Delta T=273$ К ($\Delta t=273$ °С).
2. $T_2=T_1m/(\varrho_2V_1)=140$ К.
3. $p=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)=3$ Па.
4. $A=pV_1(T_2-T_1)/T_1=136{,}5$ Дж (здесь $p=10^5$ Па).
5. $Q=c\nu MT_0\approx8000$ Дж (здесь $M=32\times10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода).
6. $A=RT(n-1)/n$.
7. $Q=m(\lambda+c(t_0-t))=1{,}86$ МДж.
8. $t_0=t_1+C(t_1-t_2)/(c_вm)=80{,}86$ °С.
9. Правильный ответ 2).
10. $\tau'=\tau\alpha r/(c(t_к-t))=26{,}2$ мин (здесь $\alpha=0{,}2$, $t_к=100$ °С — температура кипения воды).
11. $\varphi=(\varphi_1V_1+\varphi_2V_2)/V=27$ %.

Основы электродинамики

1. $E=\sqrt{2}q/(4\pi\varepsilon_0a^2)=28$ В/см.
2. $\varphi=ne/(4\pi\varepsilon_0r)=160$ В (здесь $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона).
3. $\varphi=2\varphi_1\varphi_2/(\varphi_1+\varphi_2)=48$ В.
4. $q_2'=(q_1+q_2)R_2/(R_1+R_2)=5$ нКл.
5. Сила взаимодействия увеличивается в $\alpha=(q_1+q_2)^2/(4q_1q_2)=1{,}2$ раза.
6. $\varphi_B=\varphi_A-\Delta W/q=100$ В.
7. $$v=\sqrt{2\left(gh+\frac{qQ(1-\mathrm{tg}\,\alpha)}{4\pi\varepsilon_0mh}\right)}=8{,}7\ \text{м/с}.$$
8. $q=C(IR+\mathscr{E})$.
9. $$R_x=\frac{R_2R_3(R-R_1-R_4)}{R_2R_3-(R_2+R_3)(R-R_1-R_4)}=20\ \text{Ом}.$$
10. $R_1/R_2=(3U_2+2U_1)/(U_1-3U_2)=5$.
11. $U=\mathscr{E}(\mathscr{E}+I(\Delta R-r))/(\mathscr{E}+I\Delta R)=10{,}8$ В.
12. $\mathscr{E}=I(R/10+r)=12{,}6$ В.
13. $r=R$.
14. $r=\sqrt{R_1R_2}=6$ Ом.
15. $I=mgh/(\eta Ut)=102$ А.
16. $q=Bl^2/(16R)=5$ мкКл.
17. $B=\varrho Sa/I=5\cdot10^{-3}$ Тл.
18. $Q=2B^2l_1^2l_2v/R=10^{-3}$ Дж (тепло выделяется при входе и при выходе рамки из полосы магнитного поля).

Колебания и волны

1. $l_1/l_2=(n_2/n_1)^2=1/4$.
2. $t=(\pi/3)\sqrt{l/g}=0{,}33$ с.
3. $n=(t_1\sqrt{g+a_1}+t_2\sqrt{g+a_2})/(2\pi\sqrt{l})=13$.
4. $U=m(v^2/2-gh)/q=-18$ В.
5. Емкость конденсатора надо увеличить в $\alpha=(\nu\lambda/c)^2=4$ раза.
6. $I_m=U_m\sqrt{C/L}=10$ А.
7. $l=v/(2\nu)=1$ м.
8. От 3 до 9 метров.

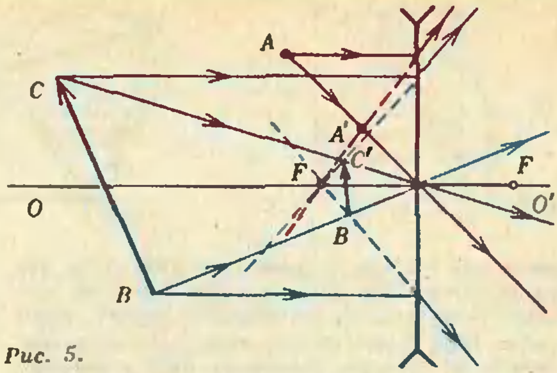


Рис. 5.

Оптика

1. $n_2=n_1\,\mathrm{ctg}\,\gamma=4{,}1$.
2. $\delta=\arcsin(n\cos\gamma)=55°$.
3. $b=a\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}/(n\cos\alpha)=16{,}4$ см.
4. $F=d\Gamma/(\Gamma+1)=0{,}2$ м.
5. $d=F(\Gamma+1)/\Gamma=0{,}9$ м.
6. $F=f/(\Gamma+1)=0{,}1$ м.
7. $F=1$ м или $F=0{,}33$ м.
8. См. рис. 5.
9. $\nu=W/h=1{,}18$ ПГц.
10. $A=hc/\lambda-mv^2/2=5{,}38\cdot10^{-19}$ Дж.
11. $\lambda_m=c(\beta-1)/(\nu(\beta-\alpha))$.
12. $\Delta m_1=m_1-4m_2+4\Delta m_2=0{,}12$ а. е. м.; $E_{св1}=E_{св}\Delta m_1/\Delta m=112$ МэВ.
13. $m=PtM/(\eta wN_A)=1{,}58$ кг (здесь $t=1$ сутки$=24\cdot60\cdot60$ с; $M=235\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса урана).
14. $E_{min}=E_n(3m_2+4m_3-m_1)/m_0=39{,}2$ МэВ.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Сумма длин полуокружностей в обоих случаях будет одинаковой и равной $\pi\cdot AB/2$, где AB — длина отрезка, на котором построены полуокружности.
2. Капли воды, преломляя свет как линзы, концентрируют его в отдельных точках, что может привести к ожогам растения.
3. ПУТЕШЕСТВИЕ=62314153871.
4. Наименьшая сумма равна 102. Она достигается в трех расположениях, изображенных на рисунке 6

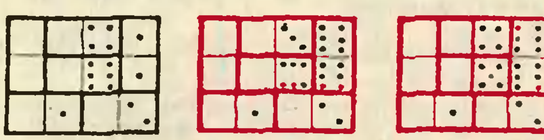


Рис. 6.

5. В случае квадратного стола и круглых салфеток отметим на столе пять точек: четыре угла и центр (рис. 7, *а*). Так как салфеток четыре, хотя бы одна салфетка покрывает сразу две из этих точек. Из попарных расстояний между этими точками наименьшее — между центром и одним из углов. Это — половина диагонали, поэтому диаметр круглой салфетки не меньше этого расстояния.
Если квадратные салфетки покрывают круглый стол (рис. 7, *б*), то они покрывают и его край — окружность. Среди салфеток найдется такая, которая покрывает не меньше четверти

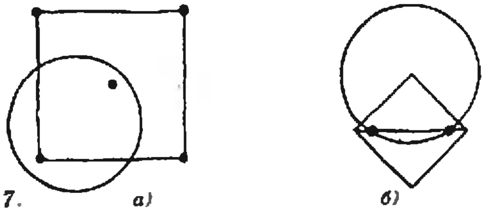


Рис. 7. *а)* *б)*

этой окружности. Возьмем на этой дуге две точки, отстоящие друг от друга ровно на четверть окружности. Расстояние между ними равно $R\sqrt{2}$, а расстояния между точками салфетки не больше диагонали этой салфетки, т. е. $a\sqrt{2}$, где a — сторона салфетки. Следовательно, $a \geqslant R$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 5)

Вопросы и задачи

1. Нет, не может.
2. Может, если равнодействующая, отличная от нуля, составляет угол 90° с направлением перемещения тела.
3. В том случае, когда начальная и конечная точки находятся на эквипотенциальной поверхности.
4. В потенциальную энергию системы «тело+ +электроны» и в кинетическую энергию электронов.
5. Один из способов — отбросить какой-либо предмет в сторону, строго противоположную кораблю; тогда космонавт приобретет скорость, направленную к кораблю.
6. Векторная сумма импульсов любой пары симметричных элементов маховика равна нулю (рис. 8). Следовательно, и суммарный импульс всего маховика тоже равен нулю.

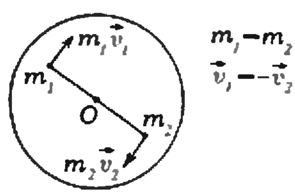


Рис. 8.

7. Импульс вращающегося цилиндра равен нулю (см. задачу 6). Значит, скорость тележки будет такой, как если бы цилиндр был неподвижно закреплен.
8. Система «атом газа+фотон» — замкнутая, а фотон обладает импульсом.
9. Закон сохранения импульса.
10. Поскольку рентгеновские лучи «выбивают» из пластинки электроны, она зарядится положительно.
11. Закон сохранения заряда.

Микроопыт

Поскольку вы приобрели скорость относительно воды, то, в соответствии с законом сохранения импульса, лодка должна приобрести скорость противоположного направления.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 5)

1. $(\sqrt{7},\ 0,\ -2\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7},\ 0,\ 2\sqrt{7})$, $(1, 2, 4)$, $(-1, -2, -4)$. Указание. Умножим первое уравнение на $x-y$, второе на $z-x$, третье на $y-z$ и сложим. Получится $7(x-y)+21(z-x)+ +28(y-z)=0$, откуда $z=3y-2x$. Подставляя это значение z во второе и третье уравнения, получаем, что либо $y=0$, либо $y=2x$.

2. Пусть точка M внутри четырехугольника $ABCD$ не покрыта кругами. Тогда углы AMB, BMC, CMD, DMA меньше 90°, чего не может быть.

3. Нет. Решение. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — наша прогрессия и a_n кончается цифрой 3. Пусть, далее, a_m кончается цифрой 7. Если $m > n$, скажем, $m = n + k$, $k > 0$, то a_{n+2k} кончается цифрой 1, a_{n+3k} кончается цифрой 5 — противоречие. Если $m < n$, скажем, $n = m + l$, $l > 0$, то a_{m+2l} кончается цифрой 9, a_{m+3l} кончается цифрой 5 — снова противоречие.

4. Будем грузить глыбы, не выбирая, на первую платформу, пока их вес не превысит 58 т. Последнюю глыбу снимем и положим рядом с платформой. Точно так же будем грузить глыбы на 2-ю, 3-ю, ..., 14-ю платформу. Вес глыб, лежащих на 14 платформах и рядом с ними, будет более $58 \cdot 14 = 812$ т. Оставшиеся глыбы весят менее 58 т, и их можно погрузить на 15-ю платформу. В нашем распоряжении еще 2 платформы, на которые нужно погрузить 14 глыб. Но 7 глыб весят не более 56 т, так что это наверняка можно сделать.

5. Мы должны построить бесконечно много пар (m, k) натуральных чисел, удовлетворяющих соотношению $10m^2+1=k^2$. Первую такую пару просто подбираем: $m=6$, $k=19$ ($6^2=36$, $19^2=361$). Далее мы замечаем, что если $10m^2+1=k^2$, то $10(2mk)^2+1 = =40m^2(10m^2+1)+1 = 400m^4+40m^2+1 = =(20m^2+1)^2$, поэтому по паре (m, k), удовлетворяющей нашему условию, мы можем построить пару $(2mk,\ 20m^2+1)$ заведомо бо́льших чисел, также удовлетворяющих нашему условию. Это позволяет найти бесчисленное множество таких пар.

6. Из наших соотношений следует, что
$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1,$$
откуда
$$(x+y+z)(yz+xz+xy)=xyz,$$
$$0=(x+y+z)(yz+xz+xy)-xyz= =(x+y)(x+z)(y+z).$$
Следовательно, либо $x+y=0$, либо $x+z=0$, либо $y+z=0$, и, значит, либо z, либо y, либо x равно $x+y+z=a$.

7. 661 тройка и 2 двойки (или 661 тройка и 1 четверка). Доказательство. В искомом разложении не могут присутствовать числа, бо́льшие 4, потому что такое число n можно заменить числами 2, $n-2$, и произведение увеличится. Если в разложении присутствуют четверки, мы можем заменить каждую из них парой двоек, не изменив произведения. Единиц тоже быть не может: мы приплюсуем единицу к любому другому числу, и произведение увеличится. Значит, в одном из искомых наборов стоят только тройки и двойки. Если есть 3 двойки, мы заменим их двумя тройками, и произведение опять увеличится. Итак, наш набор содержит не более двух двоек, остальные числа набора — тройки.

8. 1/7. Решение (см. рис. 9). Ясно, что $S_{AA_1B}=S_{BB_1C}=S_{CC_1A}=S_{ABC}/3$. Найдем площадь треугольника AC_1Y. Для этого проведем отрезок A_1C_2, параллельный отрезку CC_1. Так как $BC_2:BC_1=1:3$, то $BC_2=2AB/9$, и поэтому $AY:AA_1=AC_1:AC_2=3/7$. Следовательно, $S_{AC_1Y}/S_{AA_1B}=(AY/AA_1)(AC_1/AB)=1/7$ и, значит, $S_{AC_1Y}=S_{ABC}/21$. Аналогично, $S_{BA_1X}=$

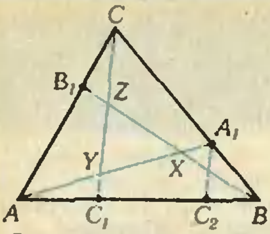


Рис. 9.

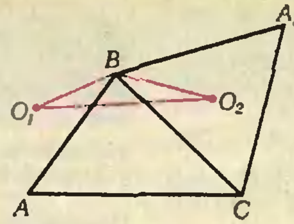


Рис. 10.

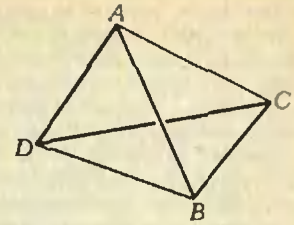


Рис. 11.

$=S_{CB_1Z}=S_{ABC}/21$. Поэтому $S_{AYZB_1}=S_{CZXA_1}=S_{BXYC_1}=5S_{ABC}/21$ и $S_{XYZ}=S_{ABC}-\frac{3}{21}S_{ABC}-\frac{15}{21}S_{ABC}=\frac{1}{7}S_{ABC}$.

9. Доказательство (см. рис. 10). Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры равносторонних треугольников ABC_1, BCA_1 и ACB_1, построенных на сторонах AB, BC и CA. Треугольники O_1BO_2 и ABA_1 подобны, поскольку $O_1B/AB=O_2B/A_1B=1/\sqrt{3}$ и $\angle O_1BO_2=\angle ABA_1=\angle B+60^\circ$. Из подобия следует, что $O_1O_2=AA_1/\sqrt{3}$. Аналогично, из подобия треугольников O_2CO_3 и ACA_1 выводим, что $O_2O_3=AA_1/\sqrt{3}$. Значит, $O_1O_2=O_2O_3$. Точно так же доказывается, что $O_1O_2=O_1O_3$.

10. а) c — целое, a и b — либо оба целые, либо оба имеют вид: *целое плюс* 1/2. Доказательство. Подставляя в наш многочлен 0 и ± 1, мы находим, что c и $a\pm b$ — целые числа. Следовательно, целыми являются числа c, $2a$, $2b$ и $a+b$, что и утверждается. Обратно, если указанные числа — целые, то многочлен имеет вид

$$m\frac{x(x-1)}{2}+nx+p$$

с целыми m, n и p и принимает при целых x целые значения.

б) Числа $6a$, $2b$, $a+b+c$ и d должны быть целыми, т. е. многочлен должен иметь вид

$$m\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+n\frac{x(x-1)}{2}+px+q$$

с целыми m, n, p и q.

Замечание. Многочлен k-й степени, принимающий при целых x целые значения, всегда имеет вид

$$m\frac{x(x-1)\ldots(x-(k-1))}{k!}+n\frac{x(x-1)\ldots(x-(k-2))}{(k-1)!}+\ldots+px+q$$

с целыми m, n, ..., p, q.

11. (u_1, u_1), (u_2, u_2), (u_3, u_4), (u_4, u_3), где u_1, u_2 — корни уравнения $u^2+(a-1)u+b=0$, u_3, u_4 — корни уравнения $u^2+(a+1)u+(a+b+1)=0$; если одно (или оба) из этих уравнений имеет совпадающие решения или вовсе не имеет решений, то наша система имеет соответственно меньшее число решений; таким образом, число решений нашей системы равно суммарному числу решений указанных двух квадратных уравнений.

Указание. Вычитая уравнения системы одно из другого, мы получаем уравнение $x-y=(y^2-x^2)+a(y-x)$, из которого либо $x=y$, либо $x+y+a+1=0$.

12. Обозначим левую часть доказываемого равенства через x и возведем ее в куб, воспользовавшись формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Получим

$$x^3=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3x\sqrt[3]{20^2-2\cdot 14^2}=6x+40.$$

Очевидно, $x=4$ есть решение уравнения $x^3=6x+40$; других решений это уравнение не имеет, ибо $x^3-6x-40=(x-4)(x^2+4x+10)$.

13. Правильный. Доказательство. Если радиус нашей окружности равен 1, то полупериметр равен

$$p=\sin x+\sin y+\sin z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\sin(x+y),$$

где x, y, z — углы треугольника. При фиксированном z, т. е. при фиксированном $x+y$, p принимает, очевидно, наибольшее значение при $x=y$. Значит, треугольник с наибольшим периметром следует искать среди равнобедренных треугольников. Ограничиваясь же случаем $x=y$, мы имеем

$$p=2\sin x+\sin 2x,\ p'=2\cos x+2\cos 2x,$$

$p'=0$ на интервале $0<x<\frac{\pi}{2}$ только при $x=\frac{\pi}{3}$.

14. Пусть $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n$ — наши числа. Тогда

$$x_1+x_2+x_3\geqslant x_1+x_2+x_3-(x_1-x_3)(1-x_1)-(x_2-x_3)(1-x_2)=x_1^2+x_2^2+x_3(3-x_1-x_2)=x_1^2+x_2^2+x_3(x_3+\ldots+x_n)\geqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=1.$$

15. Пусть $ABCD$ — произвольный пространственный неплоский четырехугольник. Достроим его до тетраэдра (рис. 11) и воспользуемся тем, что сумма любых двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла: $\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA<(\angle BAC+\angle DAC)+\angle ABC+(\angle BCA+\angle DCA)+\angle CDA=(\angle BAC+\angle ABC+\angle BCA)+(\angle DAC+\angle DCA+\angle CDA)=180^\circ+180^\circ=360^\circ$.

Правильное решение геометрической задачи
(см. «Квант» № 5)

1. Построим треугольник $A'B'C'$ так же, как в решении задачи 1, и построим окружность с центром C', радиус которой равен данному значению d. Эта окружность пересекает отрезок $A'B'$ в 0, 1 или 2 точках. Берем одну из этих точек N', строим прямоугольник $K'N'M'C'$ и переносим его в треугольник ABC. Поскольку с самого начала вместо стороны BC можно

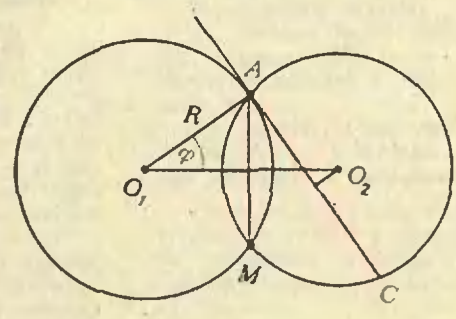


Рис. 12.

было взять любую другую сторону, возможно любое число решений от 0 до 6.

2. Если $AC < AB$, то искомая сумма расстояний будет наименьшей, когда прямая l совпадает с прямой AB. Если $AC = AB$, то наименьшее значение достигается для двух прямых: AC и AB.

3. Пусть AC — отрезок касательной к большей окружности, заключенный внутри меньшей окружности (рис. 12). Тогда

$$AC = 2O_1O_2 \sin\varphi, \quad AM = 2R \sin\varphi,$$

где φ — это угол AO_1O_2, R — радиус бо́льшей окружности. Если $O_1O_2 > R$, то AM — искомая прямая; если $O_1O_2 < R$, то AC — искомая прямая; если $O_1O_2 = R$, то обе прямые AM и AC удовлетворяют условию задачи.

4. Решение верно лишь в том случае, если угол A треугольника острый. Если этот угол прямой, то длина медианы равна $\frac{1}{2}BC$ и не зависит от формы треугольника. Если же угол A тупой, то решения не существует: длина медианы всегда меньше $\frac{1}{2}BC$ и может быть сделана сколь угодно близкой к $\frac{1}{2}BC$ (когда AB или AC стремится к нулю).

5. Полученный результат верен лишь в том случае, когда $\angle A = 90°$, т. е. $AH \geqslant \frac{1}{2}BC$. Если же этот угол тупой, то наименьший радиус имеет окружность, построенная на BC, как на диаметре, и ответом служит прямоугольный треугольник с гипотенузой BC и данной высотой. Иными словами, если $AH \geqslant \frac{1}{2}BC$, то искомый треугольник равнобедренный; если же $AH < \frac{1}{2}BC$, то искомый треугольник прямоугольный с гипотенузой BC.

6. 45° или 135°. В решении не рассмотрен случай, когда точка пересечения высот расположена вне треугольника.

7. 900 см^2 или 780 см^2. В решении не рассмотрен случай, когда угол $CB'A$ тупой.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 3)

Задание 5 (А. Мандлер, 1929 г.). 1. Лg1! С:а4 2. Ла1 с2 3. Крс5 с1Ф+ 4. Л:с1 и 5. Ла1; 1... Сh7 2. Лg5+ Кр:а4 3. Лg7, выигрывая слона ввиду угрозы мата.

Задание 6 (Р. Люнгман, 1945 г.). **1. Лb1+ Кра7 2. Крс7 Кра6 3. Крс6 Кра5 4. Крс5 Кра4 5. Крс4 Кра5** (5... Кра3 6. Лb3+ Кра2 7. Крс3 Кg6 8. Лb2+ Кра1 9. Крс2 с быстрым матом) **6. Лb5+ Кра6 7. Л:f5 Крb7 8. Лf6 е3 9. Крd3 Крс7 10. Лh6 Кf7 11. Лh7**, забирая коня.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Н. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. А. Жигалкин, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
А. М. Пономарева, Е. К. Тенчурина, Л. А. Тишков,
П. И. Чернуский, В. В. Юдин

Фото представил А. Н. Виленкин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор О. М. Березина

Сдано в набор 16.04.87. Подписано к печати 27.05.87.
Т-12139. Бумага 70×108/16. Печать офсетная.
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,9.
Тираж 208 365 экз. Цена 40 коп. Заказ 1012.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. **250-33-54**

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЧЕМПИОНАТ МИКРОКОМПЬЮТЕРОВ

В прошлом номере рассказывалось о пятом чемпионате мира по шахматам среди больших ЭВМ. Шестое первенство микрокомпьютеров также разыгрывалось по швейцарской системе: 14 машин разыграли «корону» в семь туров. Третий раз подряд победил «Мефисто», набравший 6 очков. На сей раз чемпионат, можно сказать, носил лично-командный характер. В спор вступили три «Мефисто» (ФРГ), три «Фиделити» (США) — победитель первых трех чемпионатов, три «Реком» (Голландия), три «Цирус» (Англия) и по одной «Шахматный монстр» (США) и «Кемпелен Атари» (Венгрия). Представители одной фирмы не встречались между собой. В командном первенстве, как и в личном, победили «Мефисто» (первое, третье и пятое места).

Какие машины играют сильнее — большие или маленькие? Универсальные компьютеры, способные решать самые разнообразные задачи, превосходят своих микросоперников объемом памяти и быстродействием. Шахматные микрокомпьютеры являются специализированными — их аппаратные средства предназначены специально для игры в шахматы, и ничего другого эти машины делать не умеют. Однако в последнее время к большим машинам подключаются дополнительные микропроцессоры и аппаратные модули, реализующие определенные шахматные функции, а параметры малых ЭВМ улучшаются за счет использования более совершенных микросхем. В результате разница в классе игры машин уменьшается, и микрокомпьютеры на равных сражаются с более мощными ЭВМ. В пятом чемпионате мира среди «универсалов» играли их маленькие коллеги, причем микрочемпион «Мефисто» отстал от суперчемпиона «Крэй блитц» всего на очко.

Приведем несколько партий микрокомпьютеров в последнем чемпионате мира.

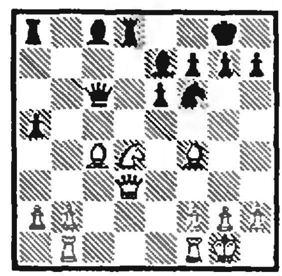
«Фиделити» — «Мефисто»
Защита Алехина

1. e4 Kf6 2. e5 Kd5 3. Kc3 K:c3 4. dc d6 5. Kf3 Kc6 6. Cf4 (обычное продолжение 6. Cb5) **6...Фd7!?** Дебютный сюрприз компьютера! Теория рассматривает 6...g6, 6...Cg4 или 6...de. Черный ферзь намерен выскочить на f5, воспрепятствовать этому можно было путем 7. Cd3. **7. Cb5 a6 8. Ca4 b5 9. Cb3 Фf5 10. Cd5 Cb7 11. g3?** Кто же так ослабляет большую диагональ? Непростительно для трехкратного чемпиона мира. **11...de 12. K:e5 0—0—0! 13. 0—0.** После 13. Фf3 немедленно проявлялись последствия хода g2 — g3: 13...Л:d5! 14. Ф:d5 K:e5 15. Ф:e5 Ф:e5 16. C:e5 C:h1. **13...g5?** Проще 13...e6, видно, компьютер счел, что марш коневой пешки принесет ему больше материальных завоеваний. **14. c4?** Да, многовато ошибок. Сейчас упорнее было 14. C:c6 (14. Фf3 Л:d5 15. Ф:d5 gf 16. Ф:f7 Ф:e5 17. Фe8+ Kd8 18. Лad1 Cd5) 14...Л:d1 15. Лf:d1 C:c6 16. K:c6 gf 17. Лd8+ Kpb7 18. Ka5+ с надеждой на 18...Kpb6?? 19. Лb8+ Kpa7 20. Kc6× или 19...Kp:a5 20.a4!!, 19...Kpc5 20.Лd1. Правда, после правильного 18...Kpa7! 19.Kc6+ Kpb6 20.Kd4 Фf6 белые беззащитны.

14...bc 15. K:f7 Л:d5 16. Фh5 gf 17. Ф:f5 Л:f5 18. K:h8 Cg7, и черные выиграли.

«Мефисто» — «Реком»
Ферзевый гамбит

1. c4 e6 2. Kc3 d5 3. d4 c5 4. cd ed 5. Kf3 Kc6 6. g3 Kf6 7. Cg2 Ce7 8. 0—0 0—0 9. Cg5 cd 10. K:d4 h6 11. Ce3 Cg4. Разыграна защита Тарраша, популярная в мировых чемпионатах не только среди машин, но и среди людей. Напомним, что Каспаров в своих претендентских матчах, а затем и в первом поединке против Карпова продолжал здесь 11...Лe8. Скорее всего, создатели «Рекома» не успели обновить дебютную библиотеку компьютера. **12. Фb3 Ka5 13. Фc2 Лc8 14. h3 Cd7 15. Kf5 Cc5 16. C:c5 Л:c5 17. Лad1 b5 18. Фd3 Kc4 19. K:d5 K:b2 20. Kfe7+ Kph8 21. Фd4 Л:d5 22. K:d5 K:d1 23. Л:d1 Ce6 24. K:f6?** После многочисленных разменов позиция сильно упростилась, но, продолжая сейчас 24. e4, белые сохраняли небольшой перевес за счет превосходства в центре. **24...Ф:f6 25. Ф:a7 Фb2 26. e3 C:a2 27. Фc5 Лe8.** Уже шансы черных выше благодаря проходной пешке «b». Надежнее было 27...Kpg8. **28. Cc6 Лe5??** Не с лучшей стороны характеризует «Реком», неужели в его программе не заложен метод «ФВ»? **29. Лd8+ Kph7 30. Ce4+! Л:e4.** Может быть, издалека машина рассматривала ход 30...g6 и оборвала вариант, не заметив тихого хода 31. Фf8 с неизбежным матом. **31. Фf5+ g6 32. Ф:e4,** и черные сдались.



«Цирус» — «Мефисто»

В данной партии черными играл тот экземпляр «Мефисто», который занял пятое место в чемпионате. Но тактическая зоркость, очевидно, у всех представителей фирмы одинакова.

17...Л:d4! Несложный, но эффектный удар, сразу ставящий все точки над «i». **18. Ф:d4 Cb7 19. f3.** Не лучше и 19. Cd5 K:d5 20. Cg3 (или 20. Лdc1) 20...Kc3! и т. д. **19...Cc5 20. Лfd1 C:d4+,** и все кончено.

Конкурсные задания

11. Белые: Kph6, Ce3, п. c2; черные: Kpe2, п. a3. Белые начинают и выигрывают.

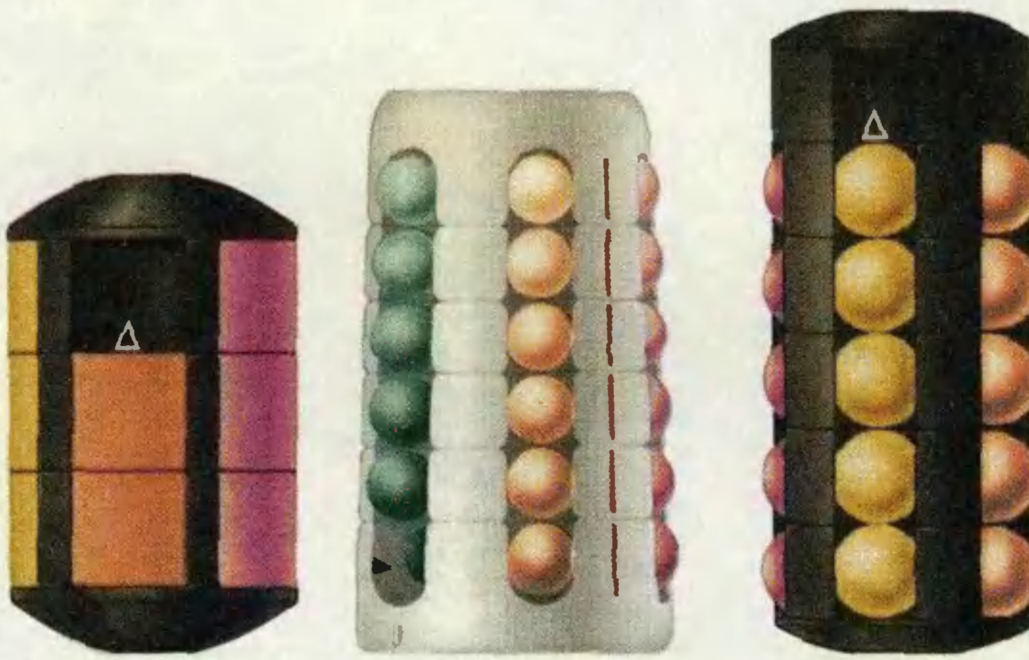
12. Белые: Kpc8, пп. a2, f4; черные: Kph6, Kh3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 августа 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Головоломки, которые вы видите на этой обложке, довольно широко распространены в нашей стране. Это «башни» с вращающимися этажами, которые населены цветными шариками или изогнутыми пластинками. Одна из «квартир» либо свободна с самого начала, как в «фонарике» или в «вариконе», где эта пустая «квартира» одна на весь «чердак», либо, как в «вавилонской башне», освобождается утапливанием одного шарика (можно утопить любой из двух противоположных шариков нижнего этажа, но не оба сразу). Пустое место создает возможность переселений вдоль вертикальных «подъездов». Во всех головоломках стандартным считается расположение, при котором все «жители» каждого «подъезда» одного цвета, причем в «вавилонской башне» их надо еще расположить по оттенкам — от темных внизу до светлых вверху. Составить такое расположение совсем несложно благодаря большому числу связей между «квартирами» — из любой из них можно попасть в любую «квартиру» на соседних этажах (после соответствующего поворота). Поэтому на этот раз мы



Фонарик Вавилонская башня Варикон

не будем касаться алгоритма решения головоломок, но предложим читателям несколько более сложных вопросов.

1) Любую ли расцветку (комбинацию цветов) можно получить? Ответ во всех трех случаях положительный. Впрочем, если бы шарики «варикона» были все разными, как в «вавилонской башне», то достижима была бы только половина возможных расцветок. Это связано с числом «подъездов» — у «варикона» их 5, у «башни» — 6. Попробуйте это объяснить.

2) Будем считать две расцветки разными, если их нельзя совместить вращением головоломки вокруг вертикальной оси (положение «чердака» у «варикона» учитывать не будем). Сколько существует разных расцветок?

3) За какое наименьшее число ходов вам удастся переставить шарики во всех «подъездах» «вавилонской башни» в обратном порядке (темные вверху, светлые внизу)? Тот же вопрос для перестановки ровно двух соседних элементов (по горизонтали или по вертикали). Нам было бы интересно познакомиться с вашими решениями.

4) Головоломку-башню можно усложнить, если провести вдоль нее вертикальную черту и требовать, чтобы после преобразований все ее кусочки соединились. Ответьте на вопрос 1 для этого случая.